Cálculo Vetorial Prático

Henrique Fleming

17-12-2001

1 Introdução

Estas notas de cálculo vetorial foram feitas no espírito das notas que Feynman fazia para si mesmo, quando jovem, e que intitulava *...for the practical man*. Escreveu, por exemplo, *Calculus for the practical man*, que pretendia conter aquilo, do Cálculo Diferencial e Integral, que *servia* para o uso quotidiano do homem *prático*, ou seja, que queria ver as coisas feitas. O Feynman era o Feynman, e eu sou eu, mas, paciência: espero que sejam úteis para quem, ainda que momentaneamente, precisa do cálculo vetorial para fins práticos: fazer uma conta!

Não procure aqui profundidade, ou demonstrações novas (ou velhas!): oferecemos aqui um algoritmo que tornará o cálculo de expressões que envolvam *div*, *rot*, etc, uma trivialidade. Na última seção eu comento como se faz cálculo vetorial quando o objetivo não é só calcular.

2 Notação e preliminares

Um vetor será sempre representado por suas componentes cartesianas. O vetor $\vec{V}$, de componentes V_i, será apresentado assim: "o vetor V_i", sem maiores comentários. As seguintes relações são óbvias:

$$(\vec{V}+\vec{W})_i = V_i + W_i \tag{1}$$

$$(\alpha\vec{V})_i = \alpha V_i \tag{2}$$

onde α é um número. Note que o índice i pode assumir os valores 1,2 e 3. Todos os índices que aparecerão aqui assumirão esses valores.

O produto escalar de dois vetores $\vec{V}$ e $\vec{W}$, denotado por $\vec{V}.\vec{W}$ é escrito

$$\vec{V}.\vec{W} = \sum_{i=1}^{3} V_i W_i \tag{3}$$

No entanto, o símbolo de soma, $\sum$, é redundante. Vamos eliminá-lo, escrevendo o produto escalar assim:

$$\vec{V}.\vec{W} = V_i W_i \tag{4}$$

A regra é que, quando os índices são repetidos (como o i nessa expressão) é sempre feita uma soma para o índice indo de 1 até 3.

Exemplos:

(1)

$$\sum_{i=1}^{3} V_i V_i \equiv V_i V_i = V_1 V_1 + V_2 V_2 + V_3 V_3 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = |\vec{V}|^2 \tag{5}$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} V_i W_i U_j M_j = V_i W_i U_j M_j = (V_1W_1+V_2W_2+V_3W_3)(U_1M_1+U_2M_2+U_3M_3) \tag{6}$$

$$= (\vec{V}.\vec{W})(\vec{U}.\vec{M}) \tag{7}$$

(3) O símbolo δ_{ij}, denominado *delta de Kronecker* é definido assim:$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$. Para todas as outras possibilidades, $\delta_{ij} = 0$. Assim, $\delta_{12} = 0$. Considere a soma

$$\delta_{ij} V_j = \delta_{i1} V_1 + \delta_{i2} V_2 + \delta_{i3} V_3 \tag{8}$$

Para $i = 1$, o único termo que não se anula é $\delta_{11} V_1 = V_1$. Mas o número 1 não tem nada de especial, logo, devemos ter que

$$\delta_{ij} V_j = V_i \tag{9}$$

Note que

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \tag{10}$$

pois o índice i, repetido, indica a soma.

3 O símbolo ϵ_{ijk}

O símbolo ϵ_{ijk} é a chave deste método. Vamos definí-lo:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{123} &= 1 \\
\epsilon_{132} &= -1 \\
\epsilon_{123} &= \epsilon_{312} = \epsilon_{231} \\
\epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} \\
\epsilon_{113} &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Em palavras, quando houver índices repetidos em ϵ_{ijk}, seu valor é zero. Os demais casos estão descritos na tabela acima. Note-se que $\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$ (por que?).

Uma maneira mais elegante de descrever as propriedades de ϵ_{ijk} é a seguinte: considere todas as permutações dos números 1,2,3. Por exemplo, (123), (231), (312),...Tomemos a particular permutação (123). Diz-se que uma permutação é *par* em relação a (123) se, para obtê-la a partir de (123) é necessário um número par de trocas de índices. A permutação (213) não é par, pois é obtida de (123) pela troca de *um* par de índices: (12) $\rightarrow$ (21). Ela é dita *impar* em relação a (123). Pois bem, ϵ_{ijk} e ϵ_{lmn} sejam tais que $i \neq j \neq k$ e $l \neq m \neq n$. ϵ_{ijk} terá o mesmo sinal de ϵ_{lmn}, se (lmn) for uma permutação par em relação a (ijk). Em particular,

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \tag{12}$$

4 O produto vetorial

O produto vetorial de $\vec{V}$ por $\vec{W}$, denotado por $\vec{V} \times \vec{W}$ é escrito assim:

$$(\vec{V} \times \vec{W})_i = \epsilon_{ijk} V_j W_k \tag{13}$$

Como um vetor é, nessas notas, expresso por suas componentes, o produto vetorial, que é um vetor, é definido expressando-se sua componente genérica em termos das componentes dos fatores $\vec{V}$ e $\vec{W}$. Recomendo ao leitor que verifique esta definição fazendo o cálculo explícito das componentes.

O produto vetorial é normalmente apresentado em termos de um determinante simbólico:

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{pmatrix} \tag{14}$$

cujo significado é

$$\vec{V} \times \vec{W} = \vec{i}\,(V_y W_z - W_y V_z) + \vec{j}\,(W_x V_z - W_z V_x) + \vec{k}\,(V_x W_y - V_y W_x) \tag{15}$$

Da eq.(13) temos, por exemplo,

$$(\vec{V} \times \vec{W})_x = (\vec{V} \times \vec{W})_1 = \epsilon_{1jk} V_j W_k = \epsilon_{123} V_2 W_3 + \epsilon_{132} V_3 W_2 = V_y W_z - V_z W_y \tag{16}$$

em acordo com a expressão acima. O leitor deve realizar este cálculo em detalhe, mostrando que a soma em j e k se reduz, efetivamente, aos dois termos presentes na eq.(16).

5 Teorema importantíssimo

Nesta seção apresentamos a nossa fórmula mágica, com a qual serão realizados pequenos milagres. Ela é:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{lk} \tag{17}$$

Não apresentaremos nenhuma demonstração desta fórmula. Não é o espírito destas notas. A idéia é *decorá-la*: ajuda muito o fato de que ela tem uma estrutura muito simples. Ao leitor desconfiado recomendo uma dessas duas coisas: verificar a fórmula, caso a caso (é factivel!), ou consultar a ref.[1], de Sir Jeffreys e Lady Jeffreys (está à página 73). (Se estiver cheio de vontade, leia o livro todo, que é muito bom!).

5.1 Aplicações

A primeira aplicação do teorema importantíssimo (eq.(17)) é o cálculo do duplo produto vetorial, $\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})$. Temos:

$$\left(\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})\right)_i = \epsilon_{ijk} V_j (\vec{W} \times \vec{U})_k \tag{18}$$

Por outro lado,

$$(\vec{W} \times \vec{U})_k = \epsilon_{klm} W_l U_m \tag{19}$$

de modo que

$$\left(\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})\right)_i = \epsilon_{ijk} V_j \epsilon_{klm} W_l U_m \tag{20}$$

Nesta última equação temos a combinação $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$, que é a mesma coisa que $\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}$. Pelo teorema importantíssimo,

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{21}$$

Levando este resultado à eq.(20), temos

$$\begin{aligned} \left(\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})\right)_i &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) V_j W_l U_m \\ &= W_i V_j U_j - U_i V_j W_J \\ &= (\vec{V}.\vec{U}) W_i - (\vec{V}.\vec{W}) U_i \end{aligned} \tag{22}$$

ou seja, finalmente,

$$\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U}) = (\vec{V}.\vec{U})\vec{W} - (\vec{V}.\vec{W})\vec{U} \tag{23}$$

Para a segunda aplicação vamos introduzir o "vetor" $\vec{\nabla}$, cujas componentes são dadas por

$$(\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{24}$$

onde x_i representa, claramente, a i-ésima coordenada cartesiana $i = 1, 2, 3$. Usaremos também uma abreviação mais drástica:

$$(\vec{\nabla})_i = \partial_i \tag{25}$$

Com isto podemos introduzir o divergente de um campo vetorial. Sejam $V_i(x, y, z)$ as componentes cartesianas de um campo vetorial. O campo escalar $div\ \vec{V}$ é descrito por

$$div\ \vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \partial_i V_i \tag{26}$$

Um desafio mais interessante é o tratamento do operador rot. O rotacional do campo vetorial $\vec{V}$ é em geral apresentado em termos de suas coordenadas cartesianas, dadas pelo determinante simbólico:

$$rot\ \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} \tag{27}$$

que significa

$$rot\ \vec{V} = \vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \tag{28}$$

Para a nossa notação é útil lembrar que $rot\ \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$. Por isso,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j V_k \tag{29}$$

Como mais uma aplicação simples, vamos mostrar que $rot\ grad = 0$.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \tag{30}$$

Para mostrar que isto é zero, vamos recorrer a outro resultado importante. Seja A_{ij} tal que $A_{ij} = -A_{ji}$, e S_{ij} tal que $S_{ij} = S_{ji}$. Dizemos que S é simétrica, e que A é antissimétrica. Vamos mostrar que

$$S_{ij}A_{ij} = 0 \tag{31}$$

(Note que um caso particular desta relação é que $\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$, pois $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ enquanto $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$). A prova é esta:

$$S_{ij}A_{ij} = -S_{ij}A_{ji} \tag{32}$$

pela antissimetria de A. Agora, mudamos os nomes dos índices: aquele que era denotado por i passa a ser denotado por j, e vice-versa. A expressão anterior então fica, repetindo-a desde o começo:

$$S_{ij}A_{ij} = -S_{ij}A_{ji} = -SjiA_{ij} = -SijA_{ij} \tag{33}$$

onde, na última igualdade, usamos a simetria de S. Comparando os dois extremos, vemos que temos uma expressão $X = -X$, cuja única solução é 0. Logo,

$$S_{ij}A_{ij} = 0 \tag{34}$$

Um ponto que em geral causa perplexidade é a "mudança de nome" dos índices. Isto é uma coisa muito simples, se se restaura, por um momento o símbolo de somatório:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{3} S_j \tag{35}$$

ou seja, a letra que designa a soma é arbitrária. Podemos trocá-la à vontade. Por isso, $S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ji} = S_{lm}A_{lm}$.

Voltando à eq.(30), temos

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{36}$$

pois se aprende no Cálculo Diferencial e Integral que a derivada mista não depende da ordem de derivação, ou seja, por exemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{37}$$

Logo, a eq.(30) nos diz que

$$rot\ grad\ f = 0 \tag{38}$$

qualquer que seja f.

6 Aplicações "peso-pesado"

Aqui veremos resultados que são difíceis, ou muito trabalhosos, de obter por outros métodos. Em primeiro lugar, vamos mostrar (como aquecimento) que $div\ rot = 0$.

$$div\ rot\ \vec{V} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \partial_i.(\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j V_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j V_k \tag{39}$$

Ora,

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j = 0 \tag{40}$$

pois ϵ_{ijk} é antissimétrico pela troca de índices (ij), e $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$. Segue que

$$div\ rot\ \vec{V} = 0 \tag{41}$$

qualquer que seja $\vec{V}$.

Seja $\vec{E}$ um campo vetorial. Por exemplo, o campo elétrico. Na teoria de Maxwell precisamos calcular $rot\ rot\ \vec{E}$. Com o nosso método, isso é simples:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right)_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(rot\ \vec{E})_k \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_l E_m \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l E_m \\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l E_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{lj})\partial_j\partial_l E_m \\ &= \partial_m\partial_i E_m - \partial_j\partial_j E_i\end{aligned} \tag{42}$$

Resta interpretar o resultado. A última linha pode ser escrita:

$$\partial_i\partial_m E_m - \partial_j\partial_j E_i = \partial_i(\vec{\nabla}\vec{E}) - \vec{\nabla}^2 E_i = \left(grad\ div\ \vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E}\right)_i \tag{43}$$

Logo,

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = grad\ div\ \vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E} \tag{44}$$

Outra relação de grande importância na eletrodinâmica é envolve o cálculo de $div(\vec{E}\times\vec{B})$.

$$\begin{aligned}div(\vec{E}\times\vec{B}) = \partial_i\epsilon_{ijk}E_jB_k &= \epsilon_{ijk}(\partial_i E_j)B_k + \epsilon_{ijk}E_j(\partial_i B_k) \\ &= B_k\epsilon_{kij}\partial_i E_j - E_j\epsilon_{jik}\partial_i B_k \\ &= B_k(rot\ \vec{E})_k - E_j(rot\ \vec{B})_j \\ &= \vec{B}.rot\ \vec{E} - \vec{E}.rot\ \vec{B}\end{aligned} \tag{45}$$

Finalmente, vamos ao nosso *tour de force*: calcular$\vec{\nabla}.(\vec{A}.\vec{B})$.

$$\left(\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})\right)_i = \partial_i(A_jB_j) = (\partial_i A_j)B_j + A_j(\partial_i B_j) \tag{46}$$

$$= (\partial_i A_j - \partial_j A_i)B_j + (\partial_j A_i)B_j + A_j(\partial_i B_j - \partial_j B_i) + A_j\partial_j B_i$$

Temos, preliminarmente, que

$$(\partial_j A_i)B_j = B_j\partial_j A_i = (\vec{B}.\vec{\nabla})A_i \tag{47}$$

$$(A_j\partial_j)B_i = (\vec{A}.\vec{\nabla})B_i \tag{48}$$

de maneira que, também preliminarmente,

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + ... \tag{49}$$

Para calcular os termos adicionais, notemos que

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_l A_m \tag{50}$$

como o leitor, a esta altura, poderá facilmente verificar. Logo,

$$
\begin{aligned}
(\partial_i A_j - \partial_j A_i)B_j = B_j \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_l A_m &= B_j \epsilon_{kij}(rot\ \vec{A})_k \qquad (51)\\
&= \epsilon_{ijk} B_j (rot\vec{A})_k = (\vec{B} \times rot\ \vec{A})_i
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
A_j(\partial_i B_j - \partial_j B_i) = (\vec{A} \times rot\ \vec{B})_i \qquad (52)
$$

Juntando estes termos à eq.(49), temos

$$
\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \times rot\ \vec{A}) + (\vec{A} \times rot\ \vec{B}) \qquad (53)
$$

7 Comentários

Como alertamos, tratamos aqui do cálculo vetorial *for the practical man*. Para um estudo completo do cálculo vetorial é preciso abordá-lo sob forma geométrica. Um texto recente de muito boa qualidade é o Marsden, Tromba [2]; muito elegante e profundo é o texto de Hermann Weyl, contido no seu trabalho sobre projeção ortogonal. Modernamente se costuma refazer o cálculo vetorial na linguagem das formas diferenciais exteriores, que dão o contexto natural, sobretudo para os teoremas integrais, do tipo Gauss-Ostrogradskii e Stokes. Para isso recomendo Bishop-Goldberg [3]. Um livro recente de Janich [4] parece ser muito bom (só o folheei, porém).

References

[1] H. Jeffreys, B. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge, 1972.

[2] J. Marsden, A. Tromba, *Vector Calculus*, Freeman.

[3] Bishop, Golberg,*Tensor Analysis on Manifolds*, Dover.

[4] K. Janich, *Vector Analysis*, Springer.