O Tensor de Momento-Energia Métrico, e o Canônico

Henrique Fleming

4-3-1994

1 Introdução

É fato bem conhecido que o tensor de momento-energia canônico[1] de um campo clássico não é simétrico pela troca de seus índices, exceto no caso de campos de spin nulo. Por causa disso ele é substuído usualmente por um outro, simétrico, que lhe é equivalente enquanto densidade de energia e momento[2][3].

Uma alternativa possível é o uso do tensor de momento-energia métrico, introduzido por Hilbert em seu trabalho clássico[4], onde ele surge como a fonte tensorial correta para o campo gravitacional.

Assim, os tensores de momento-energia canônico e métrico têm origens muito diversas, e definições ainda mais diversas. Custa crer que tenham o mesmo significado físico, isto é, que sejam equivalentes.

Neste artigo buscamos elucidar de um maneira simples quando é que essas duas espécies de tensor de momento-energia são de fato equivalentes. Mais precisamente, calculando-se o tensor métrico e passando-se ao espaço plano descrito por coordenadas cartesianas, quando é que se obtém um tensor equivalente ao tensor de momento-energia canônico? Começaremos pelo caso muito simples de um campo escalar ϕ. A seguir trataremos do caso de um meson vetorial, onde os aspectos gerais do problema já serão vislumbrados, e esboçaremos uma extensão para outros spins.

O método apresentado aqui tem talvez a vantagem de requerer apenas uma extensão (bastante natural) daquele usualmente encontrado nos tratados clássicos[1]. Uma demonstração do mesmo resultado há de estar contida no tratamento muito geral (e muito complicado!) da ref.([3]). Não conheço nenhum livro que trate do assunto: em geral apresentam apenas argumentos de plausibilidade.

2 Questões de equivalência

Para introduzir apropriadamente o tensor de momento-energia métrico é preciso que trabalhemos com coordenadas curvilíneas. Seja $\mathcal{L}(g^{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}, \phi, \partial_i\phi)$ a densidade lagrangeana. A ação é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{(-g)}\mathcal{L} \tag{1}$$

O tensor de momento-energia métrico é obtido[1] explorando-se o fato de que S deve ser invariante sob transformações infinitesimais de coordenadas $x^i \to x'^i$, com

$$x'^i = x^i + \xi^i(x) \tag{2}$$

Os campos e a métrica respondem a essa transformação da maneira seguinte[1]:

$$\delta\phi \equiv \phi'(x) - \phi(x) = -\xi^i(x)\partial_i\phi \tag{3}$$

$$\delta g^{ik}(x) = \xi^{i;k} + \xi^{k;i} \tag{4}$$

Isto induz na ação S a variação

$$\delta S = \int d^4x\delta\left(\sqrt{(-g)}\mathcal{L}\right) + \int d\sigma^l \sqrt{(-g)}\mathcal{L} \tag{5}$$

onde a segunda integral é essencial, uma vez que uma transformação geral de coordenadas não se anula necessariamente na fronteira de um domínio de integração. Para uma bela dedução desse termo, veja ([5]). Trata-se da sua equação (170). Como veremos, este termo de superfície é a chave de toda a prova. Mais explicitamente,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{(-g)}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\phi)}\partial_l\delta\phi\right\} \\ &+ \int d^4x\left[\frac{\partial\left(\sqrt{(-g)}\mathcal{L}\right)}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij} + \frac{\partial\left(\sqrt{(-g)}\mathcal{L}\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l}\right)}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta g^{ij}\right] \\ &+ \int d\sigma_l\xi^l\sqrt{(-g)}\mathcal{L} \end{aligned} \tag{6}$$

As integrações parciais usuais levam a

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{(-g)}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \left(1/\sqrt{-g}\right)\partial_l\left[\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\phi)}\right]\right\}\delta\phi \\ &+ \int d^4x\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}\right)}{\partial g^{ij}} - \partial_l\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}\right)}{\partial(\partial_l g^{ij})}\right]\delta g^{ij} \\ &+ \int d\sigma_l\left[\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\phi)}\right]\delta\phi \\ &+ \int d\sigma_l\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}\right)}{\partial(\partial_l g^{ij})}\delta g^{ij} + \int d\sigma_l\xi^l\sqrt{-g}\;\mathcal{L} \end{aligned} \tag{7}$$

Quando $\phi(x)$ satisfaz as equações de movimento, a primeira integral se anula. Definindo[1] o tensor de momento-energia métrico T_{ij} por

$$\frac{1}{2}T_{ij}\sqrt{-g} \equiv \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}\right)}{\partial g^{ij}} - \partial_l \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}\right)}{\partial(\partial_l g^{ij})} \tag{8}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{(-g)}T_{ij}\delta g^{ij} + \int d\sigma_l \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\phi)}\delta\phi \\ &+ \int d\sigma_l \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}\right)}{\partial(\partial_l g^{ij})}\delta g^{ij} + \int d\sigma_l \xi^l\sqrt{-g}\,\mathcal{L} \end{aligned} \tag{9}$$

Suponhamos, por um momento, que $\mathcal{L}$ não dependa das derivadas de g^{ij}. Isto quer dizer que os coeficientes sda conexão Γ^i_{jk} não estrão presentes, explicitamente ou através dos vários tensores de curvatura. (Naturalmente isto é sempre verdade no espaço-tempo de Minkowski descrito por coordenadas "cartesianas"). Inserindo em (10) os valores de $\delta\phi$ e δg^{ij}, temos

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{(-g)}T_{ij}\left(\xi^{i;j}+\xi^{j;i}\right) + \int d\sigma_l\sqrt{-g}\xi^m\left\{-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\phi)}\partial_m\phi + \delta^l_m\mathcal{L}\right\} \tag{10}$$

isto é,

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{(-g)}T_{ij}\left(\xi^{i;j}+\xi^{j;i}\right) - \int d\sigma_l\sqrt{-g}\xi^m\Theta^l_m \tag{11}$$

onde reconhecemos

$$\Theta^l_m = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\phi)}\partial_m\phi - \delta^l_m\mathcal{L} \tag{12}$$

como o tensor de momento-energia canônico. Ora, como é mostrado em detalhe na referência ([1]),

$$\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{(-g)}T_{ij}\left(\xi^{i;j}+\xi^{j;i}\right) = -\int d^4x\sqrt{(-g)}T^k_{i;k}\xi^i + \int d\sigma_l\sqrt{-g}\,T^l_m\xi^m\ . \tag{13}$$

Levando (13) à (11),

$$\delta S = -\int d^4x\sqrt{(-g)}T^k_{i;k}\xi^i + \int d\sigma_l\sqrt{-g}\xi^m\left(T^l_m - \Theta^l_m\right)\ . \tag{14}$$

Como δS deve se anular para ξ^i arbitrário, obtém-se

$$T^i_{i;k} = 0 \tag{15}$$

e

$$\int d\sigma_l\sqrt{-g}\left(T^l_m - \Theta^l_m\right)\xi^m = 0 \tag{16}$$

ou, finalmente,

$$T^l_m = \Theta^l_m \tag{17}$$

mostrando a equvalência dos dois tensores.[1]

[1] Na realidade, o anulamento da integral sobre uma superfície fechada arbitrária leva apenas

3 Eletrodinâmica

Embora mesons escalares sejam simples demais, eles são convenientes para expor, na forma mais simples, a estratégia da demonstração. Passemos agora ao caso da Eletrodinâmica, onde as feições do caso geral já se tornarão claras. Além disso, as conclusões se aplicarão também ao caso dos mesons vetoriais.

Considere a equação (3). Ela exibe a variação de forma de um campo escalar, um ingrediente essencial para a discussão prévia. A variação de forma de um campo vetorial A_s é dada por [6]

$$\delta A_s = -\xi^m \partial_m A_s - A_m(\partial_s \xi^m) \; . \tag{18}$$

Isto induz na ação S a variação

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_s} \delta A_s + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} \partial_l \delta A_s \right\} \\ &+ \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g^{ij}} \delta g^{ij} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial \partial_l g^{ij})} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta g^{ij} \right\} \\ &+ \int d\sigma_l \xi^l \sqrt{-g}\,\mathcal{L} \; . \end{aligned} \tag{19}$$

Procedendo como antes,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_s} - \left(1/\sqrt{-g}\right) \partial_l \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} \right] \right\} \delta A_s \\ &+ \int d^4x \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}\right)}{\partial g^{ij}} - \partial_l \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}\right)}{\partial(\partial_l g^{ij})} \right] \delta g^{ij} \\ &+ \int d\sigma_l \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l \phi)} \right] \delta\phi \\ &+ \int d\sigma_l \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_l g^{ij})} \delta g^{ij} + \int d\sigma_l \xi^l \sqrt{-g}\,\mathcal{L} \; . \end{aligned} \tag{20}$$

Suponha que a lagrangeana não dependa de $\partial_l g^{ij}$. Então, usando as equações de movimento para A_s e a definição do tensor de momento-energia métrico, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{ij} \delta g^{ij} \\ &+ \int d\sigma_l \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} \delta A_s \\ &+ \int d\sigma_l \xi^l \sqrt{-g} \mathcal{L} \end{aligned} \tag{21}$$

---

a $T^{lm} - \Theta_{lm} = \partial_f H^{fml}$, onde $H^{fml} = -Hlmf$, mas não é possível construir um tensor como H^{fml} usando apenas campos escalares. Veja o Apêndice.

Vamos estudar agora o segundo termo em detalhe. É melhor escrevê-lo na forma

$$\int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} \delta A_s \right\} =$$

$$- \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} (\partial_m A_s) \xi^m \right\} -$$

$$- \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \partial_s \xi^m \right\} \quad (22)$$

onde fizemos uso da variação de forma de A_s. Levando isto à equação (3),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} T_{ij} \delta g^{ij} \quad (23) \\ &- \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} (\partial_m A_s) \xi^m \right\} \\ &- \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \partial_s \xi^m \right\} \\ &+ \int d\sigma_l \xi^l \sqrt{-g}\, \mathcal{L}\,. \end{aligned}$$

Transformando a segunda integral numa integral de superfície e usando (3),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} T^k_{i;k} \xi^i \quad (24) \\ &+ \int d\sigma_l \sqrt{-g} T^l_m \xi^m - \int d\sigma_l \sqrt{-g} \Theta^l_m \xi^m \\ &- \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \partial_s \xi^m \right\} \end{aligned}$$

onde usamos

$$\Theta^l{}_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} \partial_m A_s - \delta^l_m \mathcal{L} \quad (25)$$

Assim

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} T^k_{i\,;k} \xi^i + \int d\sigma_l \sqrt{-g} \{T^l_m - \Theta^l_m\} \xi^m - \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \partial_s \xi^m \right\}\,. \quad (26)$$

Usando o fato de que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)}$ é antissimétrico em (l, s), temos

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial_l \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \partial_s \xi^m \right\} &= \int d^4x \partial_l \partial_s \left\{ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \xi^m \right\} \quad (27) \\ &- \int d^4x \partial_l \left\{ \xi^m \partial_s \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \right) \right\} \\ &= \int d\sigma_l \xi^m \partial_s \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)} A_m \right) \end{aligned}$$

Juntamente com com a Eq.(26) isto dá

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{-g}T^k_{i\,;k}\xi^i \\ &+ \int d\sigma_l\sqrt{-g}\left\{T^l_m - \Theta^l_m - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_s\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)}A_m\right)\right\}\xi^m . \end{aligned} \tag{28}$$

Isto deve se anular para ξ^i e domínio de integração arbitrários. Por isso,

$$T^k_{i\,;k} = 0 \tag{29}$$

e a integral de superfície também deve se anular. Em coordenadas cartesianas ξ^m podem ser tomados constantes, e então segue que

$$T^{lm} - \Theta^{lm} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_s\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)}A^m\right) = \partial_s G^{lms} \tag{30}$$

onde G^{lms} é antissimétrico nos índices (l,s). Ora, o último termo do primeiro membro tem ele mesmo esta simetria, de forma que

$$T^l_{\ m} - \Theta^l_{\ m} = \partial_s H^{lms} , \tag{31}$$

onde H é um novo tensor com as mesmas simetrias de G. Logo, T e Θ são dois tensores de momento-energia equivalentes (Veja [1], §32).

4 Conclusão

No caso do meson vetorial a demonstração da equivalência fez uso de dois fatos: o lagrangeano não dependia de $\partial_l g^{ij}$, e $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_s)}$ era antissimétrica em (l,s). A última propriedade é comum a todos os lagrangeanos que descrevem partículas de spin inteiro, no formalismo de Fierz-Pauli[7]. Para um tratamento breve e muito lúcido desse formalismo, veja [8]. Em relação à dependência em $\partial_l g^{ij}$, veremos que nenhum problema se põe (no caso de haver a dependência) para o espaço-tempo de Minkowski.

Considere um campo que é um tensor de posto s, simétrico em todos os seus índices, que se anula por contração em relação a qualquer par de índices, e que satisfaz a condição de 4-transversalidade,

$$\partial^i\psi_{i\ldots} = 0 \tag{32}$$

e seja sua dinâmica descrita pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = -(\partial_i\psi_{j_1\ldots j_s})(\partial^i\psi^{j_1\cdots j_s}) + (\partial_{j_1}\psi_{i\ldots j_s})(\partial^i\psi^{j_1\cdots j_s}) + m^2\psi_{j_1\ldots j_s}\psi^{j_1\cdots j_s} . \tag{33}$$

Este campo representa uma partícula de spin s [8] e tem a variação de forma

$$\delta\psi_{j_1\ldots j_s} = -\xi^m\partial_m\psi_{j_1\ldots j_s} - (\partial_{j_1}\xi^m)\psi_{mj_2\ldots j_s} - \ldots - (\partial_{j_s}\xi^m)\psi_{j_1\ldots m} \tag{34}$$

Note que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi_{j_1 \dots j_s})}$ é antissimétrico em (i, j_k) para todo k.

Podemos agora reproduzir cada passo da demonstração prévia. O termo $-\xi^m \partial_m \psi_{j_1 \dots j_s}$ da variação de forma participará da expressão de $\Theta^l{}_m$. Os termos restantes da eq.(34) irão, como na eq.(29), compor os termos $G^{lmf}_{,f}$, que serão a soma de s termos, todos com as mesmas simetrias de índices. Termina-se com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} T^k_{i;k} \xi^i + \int d\sigma_l \sqrt{-g} \left\{ T^l{}_m - \Theta^l{}_m - G^{l\ f}_{m;f} \right\} \xi^m \\ &+ \int d\sigma_l \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_l g^{ij})} \delta g^{ij} \end{aligned} \tag{35}$$

Mas o espaço-tempo de Minkowski tem máxima simetria, o que quer dizer que é possível escolher os ξ^m de maneira que

$$\delta g^{ij} = \xi^{i;j} + \xi^{j;i} \tag{36}$$

se anulem, restando uma família a 10 parâmetros de vetores arbitrários. O anulamento de δS para cada um desses ξ^i garante, portanto, o resultado

$$T^{lm} - \Theta^{lm} = \partial_j H^{lmf} \tag{37}$$

(onde o H será, em geral, um novo tensor com as mesmas simetrias de G^{lmf}) mesmo quando o lagrangeano depende de $\partial_l g^{ij}$, desde que o espaço-tempo seja de minkowski.

Poderíamos tratar também o caso de spin semi-inteiro, mas seria necessária a introdução do formalismo de tetradas, o que nos levaria longe demais. Por enquanto remetemos o leitor a [9].

5 Sumário

Mostramos, por uma ligeira modificação do formalismo usual, que consiste em manter todos os termos de superfície (que usualmente são desprezados), no espaço-tempo de Minkowski, que o tensor de momento-energia métrico é equivalente ao tensor de momento-energia canônico, no sentido de Belinfante-Rosenfeld, para todos os campos que descrevem partículas de spin inteiro. Como isto depende do alto grau de simetria do espaço-tempo de Minkowski, o resultado não se estende a todos os espaço-tempos. O método, contudo, pode ser usado para analisar cada caso individual.

6 Apêndice

Seja V^i um campo vetorial, dado por suas componentes em um espaço tridimensional. É dado que o fluxo de $\vec{V}$ em uma superfície fechada arbitrária é zero. Daí não decorre a nulidade de $\vec{V}$. De fato, basta que $\vec{V} = rot\ \vec{W}$, onde $\vec{W}$

é um campo vetorial arbitrário, para que a condição seja satisfeita. O resultado análogo em 4 dimensões é importante para a nossa demonstração.

Seja A^i um campo vetorial em um espaço 4-dimensional, tal que

$$\int d\sigma_l A^l = 0 \tag{38}$$

em qualquer superfície fechada, de elemento de área $d\sigma_l$. Daí não se pode concluir que A^l seja zero. De fato, basta que se tenha

$$A^l = \partial_m B^{ml} \tag{39}$$

com

$$B^{lm} = -B^{ml} \tag{40}$$

pois

$$\int d\sigma_l \partial_m B^{lm} = \int d^4x \partial_m \partial_l B^{lm} \tag{41}$$

e a segunda integral é zero por simetria. Este é o resultado que citamos na nota de rodapé ao final da primeira seção.

References

[1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* 4th. Edition, Pergamon Press.

[2] F. J. Belinfante, Physics,**6**, 887 (1939)

[3] L. Rosenfeld, Mém. Acad. Roy. Belg. (Cl.Sc.)**18**,6 (1940)

[4] D. Hilbert, *Grundlagen der Physik, in* Gesammelte Werke, Springer¡ Berlin.

[5] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, London, 1958.

[6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York.

[7] M. Fierz, W. Pauli, Proc. R. Doc. Lond. **A173**,211(1939)

[8] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon, Oxford.

[9] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, Addison-Wesley, Reading.