Introdução aos tensores

Henrique Fleming

13-11-2001

Estas notas são uma introdução aos tensores orientada para físicos. Utiliza-se o método clássico, centrado nas propriedades de transformação das componentes do tensor. A vantagem dessa abordagem é que é mais elementar, isto é, exige menos preparação. A desvantagem é que é menos "geométrica", ou seja, menos visualizável. A abordagem moderna, que não faz uso de componentes, é conquista relativamente recente, devendo-se principalmente ao matemático francês Élie Cartan e sua escola. Um físico teórico moderno deve conhecer ambas as versões. No entanto, parece-me que ainda se deva iniciar pelo método das componentes, pois a maioria dos textos sobre relatividade geral usa esse método. Para um estudo detalhado do método clássico a referência melhor é provavelmente ([1]), seguida de uma leitura do grande clássico de Hermann Weyl, ([2]). Para o método moderno recomendo ([3]) ou ([4]).

1 Mudanças de base

Sejam S ($\{\vec{e}_i\}$) e S' ($\{\vec{e}'_i\}$) duas bases ortonormais do espaço usual (R^3 como espaço vetorial, com o produto escalar usual). Cada vetor de S' pode ser expandido na base S. Denotamos essa expansão assim:

$$\vec{e}'_i = a_{ji}\vec{e}_j \tag{1}$$

Naturalmente temos, também, a expansão

$$\vec{e}_j = b_{lj}\vec{e}'_l \tag{2}$$

Combinando as duas, obtemos

$$\vec{e}'_i = a_{ji}\vec{e}_j = a_{ji}b_{lj}\vec{e}'_l \tag{3}$$

de onde segue que

$$a_{ji}b_{lj} = \delta_{il} \tag{4}$$

Seja A a matriz tal que $A_{ij} = a_{ij}$ e B tal que $B_{il} = b_{il}$. Então a equação anterior se escreve

$$A_{ji}B_{lj} = (BA)_{li} = \delta_{li} \tag{5}$$

Analogamente,

$$\vec{e}_i = b_{li}\vec{e}'_l = b_{li}a_{jl}\vec{e}_j \tag{6}$$

Logo,

$$b_{li}a_{jl} = \delta_{ij} \tag{7}$$

ou

$$(AB)_{ji} = \delta_{ji} \tag{8}$$

Isto mostra que $AB = BA = 1$, ou seja, que as matrizes A e B são inversas.

$$B = A^{-1} \tag{9}$$

1.1 Transformações das componentes de um vetor

Seja $\vec{x} = x_i\vec{e}_i = x'_j\vec{e}'_j$ um vetor qualquer. Temos

$$x'_j\vec{e}'_j = x_i\vec{e}_i = x_ib_{li}\vec{e}'_l \tag{10}$$

ou, o que é o mesmo,

$$x'_l\vec{e}'_l = x_ib_{li}\vec{e}'_l \tag{11}$$

de onde segue que

$$x'_l = b_{li}x_i \tag{12}$$

Inversamente,

$$x'_l\vec{e}'_l = x'_la_{ml}\vec{e}_m = x_m\vec{e}_m \tag{13}$$

de onde sai que

$$x_m = a_{ml}x'_l \tag{14}$$

ou, resumindo,

$$\begin{aligned} x'_l &= b_{li}x_i \\ x_m &= a_{ml}x'_l \end{aligned} \tag{15}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} x'_lx'_l &= b_{li}x_ib_{lm}x_m = b_{li}b_{lm}x_ix_m \\ &= ({}^tb)_{ml}b_{li}x_ix_m \\ &= ({}^tbb)_{mi}x_ix_m \\ &= \delta_{mi}x_ix_m \\ &= x_ix_i \end{aligned} \tag{16}$$

Diz-se que a combinação das componentes de um vetor dada por $x_l x_l$ é um *invariante*.

Considerando x_i e x'_i como coordenadas de um mesmo ponto, temos a função $x'_l(x)$, e, então,

$$\frac{\partial x'_l}{\partial x_i} = b_{li} \tag{17}$$

e

$$\frac{\partial x_m}{\partial x'_l} = a_{ml} \tag{18}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} x'_l &= \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} x_i \\ x_m &= \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} x'_l \end{aligned} \tag{19}$$

No que se segue, vamos *definir* um vetor através das Eqs.(19), ou seja, através das propriedades de transformação de suas componentes. Isto se faz mais ou menos assim: seja $\vec{v}$ um vetor, isto é, um conjunto de pares (v_i, S), onde S é uma base e $\{v_i : i = 1...n\}$ números ditos *componentes nessa base*, relacionados de uma base para outra, pelas Eq.(19). Para mostrar que o conjunto dos vetores assim definidos forma um espaço vetorial, definamos, dados $\vec{v}$ e um número λ, o vetor $\lambda\vec{v}$. É o vetor de componentes λv_i. Dados dois vetores, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, definamos o vetor $\vec{v} + \vec{w}$ como aquele cujas componentes são $v_i + w_i$. É facil mostrar que, nessas condições, o conjunto dos vetores forma um espaço vetorial. Nosso próximo passo é mostrar que existem quantidades mais complexas que os vetores e que têm interesse físico.

1.2 O momento de inércia

Considere um corpo rígido: um sistema de partículas cujas distâncias de umas as outras permanecem fixas. Seja m a massa de uma partícula genérica, e $\vec{v}$ a sua velocidade. O momento total do corpo rígido será então

$$\sum m\vec{v} \tag{20}$$

A notação usual seria: m_i é a massa da i-ésima partícula, $\vec{v}_i$ sua velocidade, e o momento total, $\sum_i m_i \vec{v}_i$. Contudo, queremos economizar índices, por isso omitimos aquele que identificaria cada partícula. A convenção é esta: uma letra minúscula representa quantidades de uma partícula; letras maiúsculas representam quantidades comuns a todas as partículas. Um resultado fundamental da mecânica é que a velocidade instantânea de cada ponto do corpo rígido, $\vec{v}$, pode ser decomposta assim:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \tag{21}$$

onde $\vec{V}$ é uma velocidade comum a todas as partículas, e $\vec{\Omega}$ é a *velocidade angular instantânea* (também a mesma para todas as partículas). Naturalmente, $\vec{r}$ é o vetor de posição de cada partícula.[1] A energia cinética do corpo rígido pode então ser escrita:

$$T = \sum \frac{m}{2} \vec{v}^2 = \sum \frac{m}{2} (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \tag{22}$$

onde, como é usual, o quadrado de um vetor é o produto escalar dele consigo mesmo. Calculando este produto escalar, obtemos

$$(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{V}.\vec{V} + 2\vec{V}.(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + (\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \tag{23}$$

O segundo termo do segundo membro aparece, na energia cinética, sob a forma

$$\sum m\vec{V}.(\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \, . \sum m\vec{r} \tag{24}$$

Mas o termo $\sum m\vec{r}$ pode ser posto igual a zero, se tomarmos a origem no centro de massa do corpo. De fato, sejam M a massa total do corpo, e $\vec{R}$ a posição de seu centro de massa. Então

$$\vec{R} = \frac{\sum m\vec{r}}{M} \tag{25}$$

e, se o centro de massa está na origem, $\vec{R} = 0$, o mesmo valendo, então, para $\sum m\vec{r}$. A energia cinética é então escrita

$$T = \frac{M}{2} \vec{V}^2 + \sum \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \tag{26}$$

O último termo pode ser reescrito assim:

$$\begin{aligned}
(\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \epsilon_{ilm}\Omega_l x_m & (27)\\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\Omega_j\Omega_l x_k x_m & (28)\\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm})\Omega_j\Omega_l x_k x_m & (29)\\
&= \Omega_i\Omega_i x_j x_j - \Omega_i x_i \Omega_j x_j & (30)\\
&= \Omega_i\Omega_j(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) & (31)
\end{aligned}$$

[1] Em palavras, em cada instante o movimento de um corpo rígido pode ser decomposto numa translação de velocidade $\vec{V}$ mais uma rotação do corpo como um todo em torno de um eixo que tem a direção de $\vec{\Omega}$, com velocidade angular Ω. Este resultado é um caso particular do resultado mais geral, devido a Helmholtz, que caracteriza o movimento instantâneo de um corpo plástico. Veja Ref.([5]).

o que dá, para a energia cinética,

$$T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j)\Omega_i\Omega_j \tag{32}$$

e, se definirmos as componentes do *momento de inércia* como

$$I_{ij} = \sum m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j) \tag{33}$$

teremos

$$T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j \tag{34}$$

O momento de inércia é construído com as componentes do vetor $\vec{r}$, mas não é um vetor. Suas componentes contêm produtos das componentes de $\vec{r}$. Uma quantidade desse tipo é dita um *tensor*. Fala-se, então, no tensor momento de inércia. Vamos obter agora a maneira pela qual as componentes do tensor momento de inércia se transformam por mudança de base. A energia cinética é um invariante, pois não é alterada por uma mudança de base. Ora, a quantidade

$$I_{ij}\Omega_i\Omega_j \tag{35}$$

comparece na expressão da energia cinética, sendo, também, um invariante. Logo, se mudarmos de base, teremos

$$I_{ij}\Omega_i\Omega_j = I'_{lm}\Omega'_l\Omega'_m \tag{36}$$

onde as quantidades do segundo membro são componentes em relação à segunda base. As propriedades de transformação das componentes de $\vec{\Omega}$ são conhecidas, pois trata-se de um vetor. Então,

$$\begin{aligned} \Omega_i &= a_{li}\Omega'_l \\ \Omega_j &= a_{jm}\Omega'_m \end{aligned}$$

que, levadas à Eq.(36), dão

$$I_{ij}a_{li}a_{jm}\Omega'_l\Omega'_m = I_{lm}\Omega'_l\Omega'_m \tag{37}$$

Comparando, segue que

$$I'_{lm} = a_{li}a_{jm}I_{ij} \tag{38}$$

que dá a fórmula de transformação das componentes do tensor de inércia por mudança de base. Inspirados nesse resultado, definimos: *tensor de segunda ordem* é um conjunto de pares $(S\ ,\ t_{ij})$, onde S é uma base e t_{ij} são números, sendo que esses números se relacionam aos de outra base pelas relações (ditas fórmulas de transformação)

$$t'_{ij} = a_{il}a_{jm}t_{lm} \tag{39}$$

sendo os a_{il} os mesmos coeficientes que aparecem na fórmula de transformação das componentes de um vetor. Isto permite que se diga que um tensor de segunda ordem transforma-se como o produto de dois vetores.

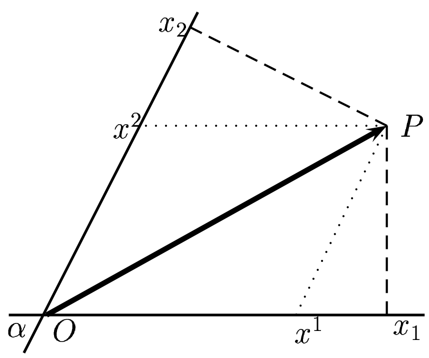
Chegamos às propriedades de transformação do tensor de inércia a partir do fato de que $I_{ij}x_ix_j$ devia ser um invariante. Vejamos agora um outro tensor que pode ser descoberto dessa forma: sejam P, de coordenadas x_i e $P + dP$, de coordenadas $x_i + dx_i$ dois pontos muito próximos. O quadrado da distância entre eles é dado em termos das coordenadas por

$$ds^2 = g_{ij}dx_idx_j \tag{40}$$

onde g_{ij} são coeficientes que dependem da base considerada. Como ds^2 é um invariante (a distância entre dois pontos não depende da base considerada) concluímos, pela mesma seqüência de argumentos, que g_{ij} são as componentes de um tensor de segunda ordem. Este tensor, um dos mais importantes, é denominado *tensor métrico.*

2 Eixos não ortogonais

Quando se utilizam bases não ortogonais, uma surpresa aparece: um vetor tem dois tipos diferentes de componentes, chamadas componentes covariantes e componentes contravariantes.



Isto vem do fato, como mostra a figura, de que podemos identificar um vetor através de suas projeções nos eixos, de duas maneiras diferentes: por projeções ortogonais e projeções paralelas (em eixos ortogonais essas duas projeções coincidem).

O vetor OP, referido a eixos oblíquos, pode ser caracterizado tanto pelo par de números (x^1, x^2), obtidos por projeção de P paralelamente aos eixos, quanto pelo par de números (x_1, x_2), obtidos por projeção ortogonal.(x^1, x^2) são as coordenadas *contravariantes* do vetor OP. (x_1, x_2) são as coordenadas *covariantes*. A relação entre elas é obtida facilmente:

$$x_1 = x^1 + x^2 \cos\alpha \tag{41}$$
$$x_2 = x^2 + x^1 \cos\alpha \tag{42}$$

assim como a relação inversa:

$$x^1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}(x_1 - x_2\cos\alpha) \tag{43}$$
$$x^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}(x_2 - x_1\cos\alpha) \tag{44}$$

O comprimento $\overline{OP}$ do vetor, em termos de suas componentes contravariantes, é dado por

$$\overline{OP}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2x^1x^2\cos\alpha = \sum_{i,j} g_{ij}x^ix^j \tag{45}$$

onde g_{ij} tem os seguintes valores, tabulados como uma matriz: $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Usando (77), temos a expressão para $\overline{OP}$ em termos das componentes covariantes:

$$\overline{OP}^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left((x_1)^2 + (x_2)^2 - 2x_1x_2\cos\alpha\right) = \sum_{i,j} g^{ij}x_ix_j \tag{47}$$

com

$$g^{ij} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Vamos, a partir de agora,voltar a usar a notação abreviada: em expressões do tipo

$$\sum_j g_{ij}x^j$$

omitiremos o símbolo da soma (Σ). Toda vez que tivermos um índice repetido, como em $g_{ij}x^j$ (o j é repetido) somaremos sobre esse índice, como se houvesse o $\sum_j$ na frente. Então a Eq.(42) pode ser escrita

$$x_i = g_{ij}x^j \tag{49}$$

e a Eq.(77),

$$x^i = g^{ij}x_j \tag{50}$$

É claro então que

$$x_i = g_{ij}x^j = g_{ij}g^{jl}x_l \tag{51}$$

e, conseqüentemente,

$$g_{ij}g^{jl} = \delta_i^l \tag{52}$$

Isto é, a matriz de elementos g_{ij} é a inversa da matriz de elementos g^{ij}.

Se introduzirmos vetores unitários $\vec{e}_1$ ao longo do eixo 1 e $\vec{e}_2$ ao longo do eixo 2, teremos

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i \tag{53}$$

que define as componentes contravariantes. As componentes covariantes são definidas por

$$x_i = \vec{x}.\vec{e}_i \tag{54}$$

Usando (53) em (54), temos

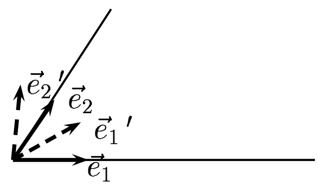
$$x_i = (x^j\vec{e}_j).\vec{e}_i = x^j(\vec{e}_i.\vec{e}_j) \tag{55}$$

logo, comparando com (49),

$$g_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e}_j \tag{56}$$

2.1 Transformações de coordenadas

Introduzindo novos vetores unitários $\underline{\vec{e}}_1$ e $\underline{\vec{e}}_2$, obtidos dos anteriores por uma rotação de um certo ângulo θ, e traç ando novos eixos nas direções desses vetores, teremos também novas componentes para um vetor qualquer.



Suponhamos que os vetores unitários originais se expressem em termos dos novos por

$$\vec{e}_i = \underline{\vec{e}}_r a_i^{\ r} \tag{57}$$

Então,

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^i a_i^{\ r} \underline{\vec{e}}_r = \underline{x}^r \underline{\vec{e}}_r \tag{58}$$

onde $\underline{x}^r$ são as componentes do vetor $\vec{x}$ em relação aos novos eixos, na direção dos novos vetores unitários. Segue daí que

$$\underline{x}^r = a_i^{\ r} x^i \tag{59}$$

que dá a fórmula da transfromação para as componentes contravariantes de um vetor. Seja agora $b_r^{\ i}$ a matriz inversa de $a_i^{\ r}$, isto é, a matriz para a qual

$$b_r^{\ i} a_i^{\ l} = \delta_i^l \tag{60}$$

Então, como se verifica facilmente,

$$\underline{\vec{e}}_r = b_r^{\ i} \vec{e}_i \tag{61}$$

e

$$\underline{x}_r = (\vec{x}.\underline{\vec{e}}_r) = (\vec{x}.b_r^{\ i}\vec{e}_i) = b_r^{\ i}(\vec{x}.\vec{e}_i) = b_r^{\ i} x_i \tag{62}$$

logo,

$$\underline{x}_r = b_r^{\ i} x_i \tag{63}$$

Isto é, as componentes covariantes se transformam pela matriz inversa[2] da matriz de transformação das componentes covariantes. Por isso,

$$\underline{x}^r \underline{x}_r = a_i^{\ r} x^i b_r^{\ l} x_l = a_i^{\ r} b_r^{\ l} x^i x_l = \delta_i^l x^i x_l = x^i x_i \tag{64}$$

isto é, combinações do tipo covariante-contravariante são *invariantes*. Isto era de se esperar, pois

$$x^i x_i = g_{il} x^i x^l \tag{65}$$

é o quadrado do módulo do vetor de componentes x^i, e isto não pode depender de que tipo de coordenadas se usa.

[2]Na realidade, a matriz de transfromação em questão é a *transposta* da inversa, mas o nosso tratamento não é suficientemente fino para notar isso.

3 Conceito geral de tensor

Vamos passar agora a um grau maior de generalidade, abrindo mão da existência de coordenadas cartesianas. Os resultados serão então a extensão necessária do conceito de vetor (e, mais geralmente, tensor) para espaços não-euclideanos (ou para coordenadas curvilíneas em qualquer espaço). Sejam x^μ (μ=1,2...n) as coordenadas de um ponto P em um certo sistema de coordenadas S. Suponhamos que em um outro sistema de coordenadas S', as coordenadas do mesmo ponto P sejam x'^μ. Então

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\lambda) \tag{66}$$

é a função que transforma as coordenadas de P em S nas coordenadas de P em S'. Tanto $x^\lambda(P)$ quanto $x'^\mu(P)$ são funções do ponto. Seja dx^μ a diferencial da função $x^\mu(P)$. Sabe-se que ela se transforma, por mudança de variáveis (aqui chamadas de coordenadas), da maneira seguinte:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \tag{67}$$

Definição: chama-se <u>vetor contravariante</u> ao ente matemático caracterizado por componentes A^μ que, por uma mudança de coordenadas $x \to x'$, se transformam em A'^μ da seguinte forma:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} A^\lambda \tag{68}$$

isto é, da mesma forma que a diferencial das coordenadas de um ponto.

Sejam agora $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ as componentes do operador gradiente no sistema de coordenadas S. No S', serão escritas

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \tag{69}$$

e a matriz de transformação é a inversa da matriz de transformação das componentes de vetores contravariantes.

Definição: chama-se <u>vetor covariante</u> ao ente caracterizado por componentes B_μ que se transformam, por mudanças de coordenadas, em B'^μ da forma seguinte:

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} B_\lambda \tag{70}$$

isto é, como as componentes do gradiente.

Regra importante: componentes contravariantes, índice em cima; componentes covariantes, índice em baixo!

3.1 Tensores

Tensores de segunda ordem são, essencialmente, um certo produto de dois vetores, como vimos no exemplo do tensor momento de inércia. Tensores de ordem n são produtos de n vetores. Essas quantidades aparecem naturalmente na física. Por exemplo, a curvatura do espaço-tempo, que, segundo Einstein, é o campo gravitacional, é um tensor de quarta ordem. No caso geral, onde não se usam coordenadas cartesianas ortogonais, um tensor de segunda ordem pode ser covariante, contravariante ou misto. Chama-se tensor de segunda ordem 2 vezes contravariante ao ente caracterizado pelas componentes $T_{\mu\nu}$ que se transformam, por mudança de coordenadas, da forma seguinte:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\omega}}T^{\lambda\omega} \tag{71}$$

isto é, como o produto de dois vetores contravariantes. Um tensor de segunda ordem é duas vezes covariante quando suas componentes se transformam assim:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\nu}}T_{\lambda\omega} \tag{72}$$

ou seja, como o produto de dois vetores covariantes.
Finalmente, um tensor de segunda ordem é uma vez covariante e uma vez contravariante quando suas componentes se transformam como o produto de um vetor covariante por um vetor contravariante, isto é, quando

$$T'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\mu}}T^{\lambda}_{\omega} \tag{73}$$

Um tensor de ordem 1 é um vetor. Um tensor de ordem zero é um escalar, ou invariante. Um exemplo d einvariante: sejam A^{μ} as componentes de um vetor contravariante; B_{μ} as de um vetor covariante. Considere o produto "contraído" $A^{\mu}B_{\mu}$:

$$A'^{\lambda}B'_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}B_{\beta} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}B_{\beta}A^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta}A^{\alpha}B_{\beta} = A^{\alpha}B_{\alpha} \tag{74}$$

O produto "contraído"(isto é, com todos os índices repetidos) de um vetor covariante por um contravariante é um invariante. Este é o caso particular mais simples de uma técnica geral de construir invariantes: contrair todos os índices de uma expressão tensorial. Veremos outros exemplos.

3.1.1 "Macetes"

Considere o produto de um vetor v^{μ} por um tensor $T_{\alpha\beta}$ as componentes são

$$v^{\mu}T_{\alpha\beta} \tag{75}$$

que é uma quantidade com 3 índices. Não estudamos essas quantidades, mas são tensores de terceira ordem. A ordem é dada pelo número de índices. Agora vamos contrair[3] os índices μ e α. Temos então as quantidades

$$v^{\mu}T_{\mu\beta} \tag{76}$$

havendo, é claro, uma soma sobre os μ. Pois bem, essas quantidades são, agora, componentes de um vetor covariante! De fato (o leitor pode provar isso, ou então olhar da Ref.([1])), o que determina a natureza tensorial da quantidade é o número de índices <u>não contraídos</u>. Assim, $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é um invariante, pois não tem nenhum índice não contraído.

3.2 Métrica no espaço

Seja $A^{\mu\nu}$ um conjunto de números tais que

$$A^{\mu\nu}B_{\mu}B_{\nu} \tag{77}$$

seja um invariante, para vetores covariantes B_{μ} arbitrários. Então $A^{\mu\nu}$ é um tensor duas vezes contravariante. De fato, sejam $A'^{\lambda\omega}$ as componentes de A na nova base. Então, como a expressão (77) é invariante, temos

$$A'^{\lambda\omega}B'_{\lambda}B'_{\omega} = A^{\mu\nu}B_{\mu}B_{\nu} \tag{78}$$

Mas $B_{\mu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}B'_{\lambda}$, com uma expressão análoga para B_{μ}. Segue que

$$A'^{\lambda\omega}B'_{\lambda}B'_{\omega} = A^{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\omega}}{\partial x^{\nu}}B'_{\lambda}B'_{\omega} \tag{79}$$

logo,

$$A'^{\lambda\omega} = A^{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\omega}}{\partial x^{\nu}} \tag{80}$$

e isto prova a nossa tese. Analogamente, se $A_{\mu\nu}$ são tais que, para vetores B^{μ} arbitrários, $A_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu}$ é invariante, então $A_{\mu\nu}$ é um tensor duas vezes contravariante.
Corolário: $g_{\mu\nu}$ é um tensor duas vezes covariante. De fato,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{81}$$

é um invariante para qualquer dx^{μ}. O tensor $g_{\mu\nu}$ é de grande importância, pelo que se segue. Seja A^{μ} um vetor contravariante, e considere a expressão

$$B_{\nu} = g_{\nu\mu}A^{\mu} \tag{82}$$

[3] O nome é ruim. Mas, em outras linguas é ainda pior. Em alemão, a contração de índices é denominada *verjüngung*, que quer dizer qualquer coisa como *rejuvenescimento*!

Como
$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}g'_{\alpha\beta} \tag{83}$$
e
$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}A'^\alpha \tag{84}$$
tem-se
$$\begin{aligned}
B_\nu &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}g'_{\lambda\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}A'^\alpha \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\delta^\beta_\alpha g'_{\lambda\beta}A'^\alpha \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}g'_{\lambda\alpha}A'^\alpha \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}B'_\lambda
\end{aligned}$$
isto é, B_ν é um vetor covariante, que depende só de A e do tensor métrico. Por isso, adota-se a convenção de usar para este particular B_ν a notação A_ν. Conclusão: usando a métrica, associa-se a cada vetor contravariante A^μ um único vetor covariante A_μ. Deixa-se, então, quando há uma métrica, de falar em "vetor contravariante" ou "vetor covariante", para falar simplesmente de vetor, que tem componentes covariantes e componentes contravariantes. A operação
$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \tag{85}$$
"baixa" o índice de A^μ.

Teorema: uma equação $T^{\mu\nu} = 0$, onde as componentes são em relação a um base S, implica que, em qualquer outra base S', se tenha $T'^{\mu\nu} = 0$. Ou seja, o tensor que tem todas as componentes nulas em uma base, as tem nulas em todas as bases. A demonstração é trivial, a partir das fórmulas de transformação das componentes.

3.2.1 Mais sobre o tensor métrico

No caso do espaço euclideano 3-dimensional com coordenadas cartesianas ortogonais,
$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{86}$$
isto é, em coordenadas cartesianas $g_{ij} = \delta_{ij}$. Descrevendo o mesmo espaço com coordenadas esféricas
$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi$$

$$
\begin{aligned}
x^2 &= r \sin\theta \sin\phi \\
x^3 &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$

e chamando (r, θ, ϕ), nessa ordem, de $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$, temos, como g_{ij} é um tensor,

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{lm} &= \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^m} g_{ij} \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l} \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m}
\end{aligned}
$$

Obtivemos, então, uma fórmula para calcular o tensor métrico para quaisquer coordenadas, a partir de seus valores em coordenadas cartesianas. Para coordenadas esféricas,

$$
\overline{g}_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1} \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1} \tag{87}
$$

ou seja,

$$
\overline{g}_{11} = \sin^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta = 1 \tag{88}
$$

Por um cálculo análogo chega-se a

$$
\overline{g}_{22} = r^2 \tag{89}
$$

$$
\overline{g}_{33} = r^2 \sin^2\theta \tag{90}
$$

Então o *elemento de linha* em coordenadas esféricas é

$$
ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{91}
$$

3.2.2 Um exemplo importante

Consideremos as transformações lineares homogêneas que mantêm invariante a distância euclideana

$$
g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = (x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2 \tag{92}
$$

A primeira coisa a notar é que $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Em conseqüência,

$$
x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \delta_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu \tag{93}
$$

ou seja, as componentes contravariantes e as covariantes coincidem. Restringindo-nos apenas a bases ortonormais, temos ainda que $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$, ou seja, as componentes do tensor métrico são sempre as mesmas, em qualquer base (ortonormal). Por outro lado, a fórmula geral de transformação dessas componentes é:

$$g_{\mu\nu} = g'_{\alpha\beta} a^{\alpha}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} \tag{94}$$

onde os a^{α}_{β} são os coeficientes de transformação das coordenadas de um sistema para o outro, isto é:

$$x'^{u} = a^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda} \tag{95}$$

A Eq.(94) pode então ser escrita

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} a^{\alpha}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} = a^{\beta}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} = a_{\beta\mu} a_{\beta\nu} \tag{96}$$

ou ainda

$$\delta_{\mu\nu} = ({}^{t}a)_{\mu\beta} (a)_{\beta\nu} = ({}^{t}aa)_{\mu\nu} \tag{97}$$

que quer dizer que

$${}^{t}a\, a = 1 \tag{98}$$

como matrizes. A matriz a é, então, ortogonal, resultado que já havíamos obtido anteriormente, de outra forma.

4 Transformações de Lorentz

Um *evento* 'e um ponto no espaço-tempo, isto é, alguma coisa que acontece em um ponto (x, y, z) em um instante t. O espaço-tempo de Minkowski é o conjunto dos eventos, caracterizados por suas coordenadas espaciais mais a coordenada $x^0 = ct$, que dá o instante em que o evento ocorre. As transformações de Lorentz são transformações entre membros de uma classe especial de referenciais desse espaço, os referenciais inerciais.

Daqui para diante usaremos a seguinte convenção de notação: índices gregos, como μ, λ, etc, terão valores (0,1,2,3); índices latinos, como i, j, etc, terão valores (1,2,3). Assim,

$$v^{\mu} v_{\mu} = v^0 v_0 + v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3$$

enquanto que

$$v^k v_k = v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3$$

Definição: as transformações de Lorentz são as transformações lineares homogêneas que mantêm invariante a expressão

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{99}$$

Em maior detalhe: considere um determinado evento, visto por um observador no referencial inercial S e também por outro observador, no referencial inercial S'. O observador em S atribui ao evento as 4 coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3), enquanto que o outro atribui ao mesmo evento (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). A teoria da relatividade nos diz que

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \tag{100}$$

Escrevendo na forma usual, temos

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\lambda\epsilon} x'^\lambda x'^\epsilon \tag{101}$$

onde $g_{\mu\nu}$ tem os valores

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \tag{102}$$

todas as demais componentes sendo nulas. As transformações de Lorentz são, então, transformações do tipo

$$x'^\mu = a^\mu_{\ \nu} x^\nu \tag{103}$$

que satisfazem a condição (101).

4.1 A transformação *especial* de Lorentz

Chama-se[4]. Trata-se da transformação de Lorentz de um sistema de referência S para um outro, S', que tem os eixos espaciais para lelos aos de S, tem uma velocidade relativa (em relação a S) de módulo v, ao longo da direção positiva dos eixos z, e tal que a seguinte condição se verifica: no instante $t = 0$ as origens dos dois sistemas de eixos coincidem, e neste evento (a coincidência espacial das origens, $t' = 0$ também. Esta é a transformação de Lorentz mais simples que não é trivial nem se reduz a uma mera rotação. Como é bem conhecido, ela é dada por:

$$\begin{aligned}
x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) &(104)\\
x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) &(105)\\
x'^2 &= x^2 &(106)\\
x'^3 &= x^3 &(107)
\end{aligned}$$

[4]Ou melhor, eu chamo! Não me lembro se o nome é este! Em todo o caso, o termo técnico é o seguinte: subgrupo próprio e ortócrono do grupo de Lorentz homogêneo. Viram, é melhor transformação especial de Lorentz.

onde $\beta = \frac{v}{c}$, e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Formalmente, temos

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} \ , \tag{108}$$

portanto

$$\begin{aligned}
a^{0}_{\ 0} &= \gamma & (109)\\
a^{0}_{\ 1} &= -\beta\gamma & (110)\\
a^{1}_{\ 0} &= -\beta\gamma & (111)\\
a^{1}_{\ 1} &= \gamma & (112)\\
a^{2}_{\ 2} &= 1 & (113)\\
a^{3}_{\ 3} &= 1 & (114)
\end{aligned}$$

todos os outros coeficientes sendo nulos.

4.2 Vetores e tensores no espaço-tempo

Vetores no espaço-tempo, ou 4-vetores, têm suas componentes transformando-se como as coordenadas, isto é: V^{μ} é um 4-vetor se tivermos

$$V'^{\mu} = a^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu} \tag{115}$$

Um tensor de segunda ordem no espaço-tempo tem suas componentes $T^{\mu\nu}$ transformando-se como

$$T'^{\mu\nu} = a^{\mu}_{\ \lambda} a^{\nu}_{\ \omega} T^{\lambda\omega} \tag{116}$$

com os $a^{\mu}_{\ \nu}$ dados acima.

5 O eletromagnetismo relativista

O eletromagnetismo como concebido por Maxwell poderia ser descrito assim: no sistema de referência especial em que o éter está em repouso, valem as equações de Maxwell. Em outros sistemas, só Deus sabe. Completar o eletromagnetismo exigia, então, dizer como são as equações de Maxwell em outros sistemas inerciais, ou, equivalentemente, dados os campos eletromagnéticos no "sistema do éter", determiná-los em outros sistemas. Este foi o problema abordado (e resolvido) por Einstein em 1905. Por isso seu trabalho se chamava *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento.* Vamos resolver este problema não à maneira de Einstein, que ainda não conhecia o conceito de tensores, mas à maneira de Minkowski, através de uma formulação 4-dimensional. Vamos substituir os vetores 3-dimensionais de Maxwell por 4-vetores e 4-tensores de segunda ordem.

5.1 A equação da continuidade

A equação da continuidade é nossa velha conhecida. Na linguagem tradicional ela se escreve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0 \tag{117}$$

Vamos introduzir a seguinte quantidade, de 4 componentes:

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) \tag{118}$$

que significa o seguinte: as componentes de j^μ são $j^0 = c\rho$, $j^1 = j_x$, $j^2 = j_y$ e $j^3 = j_z$. Com essa notação, a equação da continuidade pode ser expressa de uma forma compacta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} && (119) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j}\,, && (120) \end{aligned}$$

logo, a equação da continuidade pode ser escrita

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{121}$$

Mas há muito mais do que comodismo nisso. O próximo passo é o seguinte *postulado*: j^μ é um 4-vetor. No momento em que digo isto, a Eq.(121) adquire um significado muito maior, pois, se j^μ é um 4-vetor, $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}$ é um invariante (ou escalar), e a equação (121) diz que um escalar é igual a zero num sistema de referência. Logo, é igual a zero em qualquer sistema de referência (inercial, bem entendido). Ou seja, supor que j^μ é um 4-vetor é um grande passo, cheio de conseqüências. Por que j^μ é um 4-vetor? É um palpite (embora tenha o nome pomposo de postulado). Vamos ver se dá certo. Se todas as consequências desse palpite forem verdades da natureza, o palpite está apoiado pela experiência. É assim que se faz ciência[5].

Suponhamos que j^μ seja, mesmo, um 4-vetor. Então,

$$j'^0 = a^0_{\ \nu} j^\nu \tag{122}$$

Para a transformação especial de Lorentz, teremos

$$j'^0 = a^0_{\ 0} j^0 + a^0_{\ 1} j^1 \tag{123}$$

[5]Muito interessante, neste contexto, a teoria da ciência de Sir Karl Popper. Para este ilustre filósofo o cérebro é uma *máquina de conjecturas* que devem ser confrontadas com a experiência. Para ele isto é a essência de todo aprendizado, não só da ciência.

Tomemos aquele particular j^μ, em S, que tem a forma $j^\mu \equiv (c\rho, 0)$, ou seja, uma carga em repouso em S. Então, no sistema S',

$$j'^0 = a^0_{\ 0} j^0 \tag{124}$$
$$c\rho' = a^0_{\ 0} c\rho \tag{125}$$
$$\rho' = \gamma\rho \tag{126}$$

Temos ainda a componente j'^1

$$j'^1 = a^1_{\ 0} j^0 \tag{127}$$
$$= -\gamma\beta c\rho \tag{128}$$
$$j'^1 = -\gamma\rho v \tag{129}$$
$$= -\rho' v \tag{130}$$

O resultado faz sentido, pois o observador ligado a S' vê uma carga se movendo com velocidade $-v$ e, pelo cálculo anterior, com uma densidade de carga ρ'.

Uma conseqüência importante é que a carga é um invariante. De fato, pela contração de Lorentz sabemos que um volume V para o observador em S é visto pelo observador em S' como $V' = \frac{1}{\gamma}V$. Então, temos

$$\rho' V' = \gamma\rho\frac{1}{\gamma}V = \rho V \tag{131}$$

e a carga é um invariante. Um bom teste experimental da invariância da carga é o seguinte: considere um fio comum de instalação elétrica. Ele é neutro, as cargas negativas exatamente compensando as cargas positivas. Aqueço o fio. À nova temperatura, os elétrons terão ganho muito mais velocidade do que os íons positivos (pois a energia cinética média é igual para os dois, e as massas são muito diferentes). No entanto, o fio continua neutro, mostrando que a igualdade das cargas continua a ser verificada.

5.2 O 4-vetor potencial

Considere agora a quantidade

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}) \tag{132}$$

onde ϕ é o potencial escalar e $\vec{A}$ é o potencial vetor. Usando a definição dada acima de j^μ podemos escrever as equações para os potenciais assim;

$$\vec{\nabla}^2 A^\mu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A^\mu = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{133}$$

Mas o operador diferencial $\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}$ é um invariante, pois

$$\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} = -g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{134}$$

onde usamos, pela primeira vez, o tensor $g^{\mu\nu}$, que é o próprio tensor métrico, mas expresso em termos de suas componentes contravariantes. É costume usar-se a notação $\Box^2$ para o operador $\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}$, que tem também um nome: *D'Alembertiano*. Então a equação para os potenciais fica

$$\Box^2 A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{135}$$

Mas j^μ é um 4-vetor, logo $\Box^2 A^\mu$ também é. Como, além disso, $\Box^2$ é um invariante, segue de (135) que A^μ também é um 4-vetor. Há ainda uma coisa a ser demonstrada: a eq.(135) para os potenciais só é equivalente às equações de Maxwell se a condição de Lorenz,

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{136}$$

for satisfeita. Como a eq.(135) precisa ser verdadeira em todos os referenciais, por ser um escalar igualado a zero, é preciso mostrar que também a condição de Lorenz é um invariante. Felizmente isto é muito facil:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{c\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A} \tag{137}$$

Logo, a condição de Lorenz é invariante, dada por

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{138}$$

5.3 O tensor eletromagnético

Vamos agora introduzir as quantidades que correspondem, no formalismo relativista, aos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Considere o tensor de segunda ordem

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{139}$$

Em termos dos $F_{\mu\nu}$ as equações de Maxwell adquirirão sua forma definitiva. Primeiro vamos mostrar explicitamente que $F_{\mu\nu}$ é um tensor.

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_{nu}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} \tag{140}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$$

e, como $x^{\omega} = a_{\mu}^{\ \omega} x'^{\ \mu}$, temos

$$\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\ \mu}} = a_{\mu}^{\ \omega}$$

Por outro lado,

$$A'_{\nu} = a_{\mu}^{\ \omega} A_{\omega} \tag{141}$$

Logo,

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu}^{\ \omega} a_{\nu}^{\ \lambda} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\omega}} - a_{\mu}^{\ \omega} a_{\nu}^{\ \lambda} \frac{\partial A_{\omega}}{\partial x^{\lambda}} = a_{\mu}^{\ \omega} a_{\nu}^{\ \lambda} F_{\omega\lambda} \tag{142}$$

que é a fórmula de transformação de um tensor de segunda ordem.

5.3.1 As equações de Maxwell

Para obter as equações de Maxwell basta uma conta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) && (143) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x_{\nu}} && (144) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) - g^{\lambda\nu} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} && (145) \\
&= \Box^2 A^{\mu} && (146) \\
&= -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} && (147)
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \tag{148}$$

é o primeiro par de equações de Maxwell (vamos mostrar isso detalhadamente mais tarde). O segundo par decorre imediatamente da definição de $F^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{149}$$

5.4 Identificação das componentes de $F^{\mu\nu}$

Trata-se simplesmente de aplicar a definição

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \tag{150}$$

$$
\begin{aligned}
F^{0\,1} &= \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial A^1}{\partial x^0} + \frac{\partial A^0}{\partial x^1} \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
F^{10} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \\
F^{10} &= E_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{1\,2} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} \\
&= -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial y} \partial A_y \partial z \\
&= -(rot\ \vec{A})_z \\
F^{12} &= B_z
\end{aligned}
$$

Os outros casos são repetições desses dois temos:

$$
F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{151}
$$

5.5 Transformação dos campos

Por uma transformação de Lorentz, isto é, uma transformação tal que

$$
\begin{aligned}
x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) && (152) \\
x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) && (153) \\
x'^2 &= x^2 && (154) \\
x'^3 &= x^3 && (155)
\end{aligned}
$$

sabemos que $F^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, logo, que suas fórmulas de transformação são:

$$
F'^{\mu\nu} = a^{\mu}_{\ \alpha} a^{\nu}_{\ \beta} F^{\alpha\beta} \tag{156}
$$

com

$$
\begin{aligned}
a^1{}_0 &= -\gamma\beta &= a^0_1 && (157)\\
a^0{}_0 &= \gamma &= a^1{}_1 && (158)\\
a^2{}_2 &= 1 &= a^3{}_3 && (159)
\end{aligned}
$$

sendo os únicos coeficientes não-nulos. Substituindo esses valores na eq.(156) temos, por exemplo,

$$
F'^{01} = a^0{}_0 a^1{}_1 F^{01} + a^0{}_1 a^1{}_0 F^{10} = \gamma^2 F^{01} + \gamma^2\beta^2 F^{10} = \gamma^2(1-\beta^2)F^{01} = F^{01} \quad (160)
$$

Traduzindo para a linguagem dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com o uso da tabela da eq.(151), temos

$$
E'_x = E_x \quad (161)
$$

Os cálculos são todos iguais. O resultado final é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x && (162)\\
E'_y &= \gamma E_y - \beta\gamma B_z && (163)\\
E'_z &= \gamma E_z + \beta\gamma B_y && (164)\\
B'_x &= B_x && (165)\\
B'_y &= \gamma B_y + \beta\gamma E_z && (166)\\
B'_z &= \gamma B_z - \beta\gamma E_y && (167)
\end{aligned}
$$

O significado dessas fórmulas é claro: os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são aqueles observados por um dos observadores, que escolhemos como estando “em repouso”. O outro observador, examinando o mesmo sistema físico, mas, em relação ao qual, está em movimento com velocidade $\vec{v}$, observa outros campos, $\vec{E'}$ e $\vec{B'}$. Por exemplo, se o observador S tem diante de si apenas uma carga em repouso, teremos $\vec{B} = 0$. Pelas equações acima vemos que S' observará, além de campos elétricos, campos magnéticos

$$
\begin{aligned}
B'_x &= 0 && (168)\\
B'_y &= \beta\gamma E_z && (169)\\
B'_z &= -\beta\gamma E_y && (170)
\end{aligned}
$$

o que é razoável, pois, para ele, a carga está em movimento com velocidade $-\vec{v}$, e, portanto, haverá uma corrente, com o seu campo magnético inevitável.

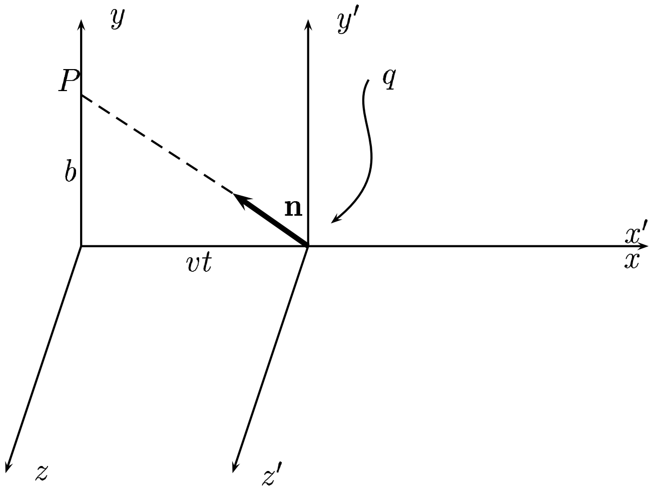
6 Aplicações

6.1 Partícula com velocidade constante

Uma partícula se move com velocidade constante $\vec{V}$. Pergunta-se quais os campos criados por ela. Vamos resolver este problema por meio de uma trnsformação de Lorentz adequada. Suponhamos que a partícula esteja em repouso no sistema de referência S'. O observador em S vai, então, vê-la nas condições do problema. No sistema S', o campo da partícula é o campo coulombiano. No ponto P (veja a figura) o campo é

$$\vec{E}'(P) = \frac{q}{r'^2}\frac{\vec{r}}{r'} \tag{171}$$

com $(r')^2 = b^2 + v^2(t')^2$, e suas componentes nas direções x e y.



Temos

$$\begin{aligned}
E'_x(P) &= \frac{q}{b^2+v^2(t')^2}\frac{-vt}{\sqrt{b^2+v^2(t')^2}} &(172)\\
E'_y(P) &= \frac{q}{b^2+v^2(t')^2}\frac{b}{\sqrt{b^2+v^2(t')^2}} &(173)\\
E'_z(P) &= 0 &(174)
\end{aligned}$$

Note-se agora que

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{175}$$

e, como o ponto P está em $x = 0$,

$$t' = \gamma t \tag{176}$$

Nas coordenadas do observador em S, então,

$$E'_x(P) = \frac{-qv\gamma t}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{177}$$

$$E'_y(P) = \frac{qb}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{178}$$

$$E'_z(P) = 0 \tag{179}$$

Usando agora as fórmulas de transformação (Eq.164 e seguintes),

$$E_x(P) = \frac{-qv\gamma t}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{180}$$

$$E_y(P) = \frac{\gamma qb}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{181}$$

$$E_z(P) = 0 \tag{182}$$

$$B_x(P) = 0 \tag{183}$$

$$B_y(P) = 0 \tag{184}$$

$$B_z(P) = \frac{\beta\gamma qb}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{185}$$

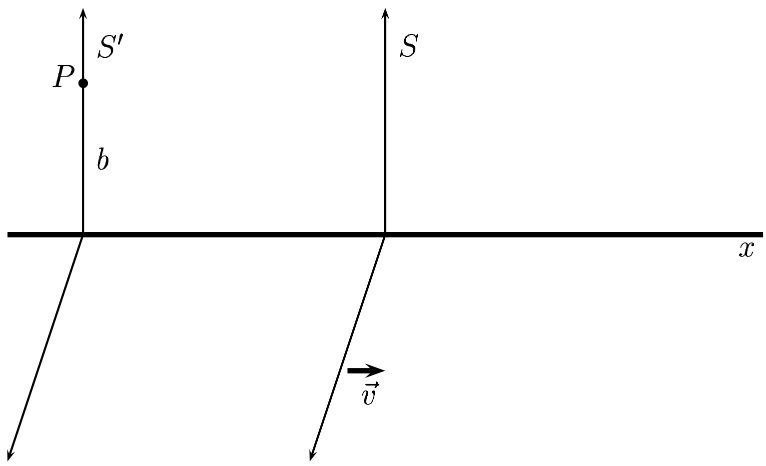
Para entender a aparência do campo elétrico, note-se que

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{-q\gamma vt}{\gamma qb} = -\frac{vt}{b} = -\frac{x}{y} \tag{186}$$

isto é, o campo $\vec{E}$, como o $\vec{E}'$, é também radial. Como $E'_x = E_x$ e $E'_y = \frac{E_y}{\gamma}$, o campo transversal é mais forte do que o longitudinal, em relação ao campo $\vec{E}'$.

6.2 Campo de um fio com corrente constante

Para simplificar suponhamos que a corrente seja produzida por um feixe de elétrons com velocidade constante (sem a contrapartida de íons positivos, como num fio). Isto será simbolizado por um fio infinito (que poderia ser um tubo oco, dentro do qual estariam passando os elétrons).



Um fio infinito ao longo do eixo x.

O sistema S, que possui velocidade v em relação ao sistema S', enxerga os elétrons parados (v é também a velocidade dos elétrons!). Neste sistema (S), então, o campo magnético é nulo, e o campo elétrico é perpendicular ao fio, radial e de módulo

$$E = \frac{2\lambda}{r} \tag{187}$$

onde λ é a densidade linear de carga. Este resultado pode ser facilmente obtido usando-se o teorema de Gauss, por exemplo. No ponto P (veja a figura), temos

$$E_x(P) = 0 \qquad B_x(P) = B_y(P) = B_z(P) = 0 \tag{188}$$

$$E_y(P) = \frac{2\lambda}{b} \tag{189}$$

$$E_z(P) = 0 \tag{190}$$

Usando as fórmulas de transformação obtemos

$$E'_x(P) = 0 \qquad B'_x(P) = 0 \tag{191}$$

$$E'_y(P) = \gamma\frac{2\lambda}{b} \quad B'_y(P) = 0 \tag{192}$$

$$E'_z(P) = 0 \quad B'_z(P) = \beta\gamma\frac{2\lambda}{b} \tag{193}$$

Em suma, o campo magnético é

$$B'_z(P) = \beta\gamma\frac{2\lambda}{b} \tag{194}$$

Se um observador "em repouso" observa uma carga por unidade de comprimento λ e uma corrente zero, quais serão a densidade de carga e a corrente observadas por um observador de velocidade $-v$? Suponhamos que o fio tenha uma secção reta de área dS. Tomando um comprimento dl do fio, temos um volume $dV = dl\ dS$. A carga neste volume é Q.

$$Q = \rho dV = \rho dS dL = \lambda\ dl \tag{195}$$

Logo, $\lambda = \rho\ dS$. Então λ se transforma como ρ, pois dS, transversal à velocidade, é invariante. Mas, como j^{μ} é um 4-vetor,

$$\begin{aligned} j'^0 &= \gamma j^0 + \beta\gamma j^1 \qquad (196) \\ J'^1 &= \beta\gamma j^0 + \gamma j^1 \qquad (197) \end{aligned}$$

e $J^0 = c\rho$ (e, neste caso, $j^1 = 0$). Segue então que

$$\begin{aligned} j'^0 &= \gamma c\rho \ \ ou \ \ \rho' = \gamma\rho \qquad (198) \\ j'^1 &= \beta\gamma c\rho \ \ ou \ \ j'^1 = \gamma\rho v \qquad (199) \end{aligned}$$

A corrente observada por S' é

$$i = j'^1 dS = v\gamma\rho dS = v\gamma\lambda \tag{200}$$

Levando este resultado à Eq.(194),

$$B'_z(P) = \beta\gamma\frac{2\lambda}{b} = \frac{2i}{cb} \tag{201}$$

que é o resultado que obtivemos antes pela lei circuital de Ampère. Pode-se ainda calcular o campo elétrico em S', ou seja, o campo elétrico de um fio infinito por onde passa uma corrente i. Este campo é, como vimos,

$$E'_y(P) = \frac{2\gamma\lambda}{b} = \frac{2\ i}{bv} \tag{202}$$

que é um resultado bastante interessante, pois não depende só da corrente, mas também da velocidade. Assim, medindo-se simultaneamente os dois campos, pode-se determinar a corrente (através de $\vec{B}$) e depois a velocidade das partículas, através de $\vec{E}$.

7 Álgebra tensorial

Existem tensores de ordem mais alta do que 2. De fato, existem tensores de ordem arbitrariamente alta. Introduzimos tensores de segunda ordem partindo do caso particular de produtos de dois vetores. Aumentando o número de vetores deeses produtos, aumentaremos a ordem dos tensores obtidos.

Mais precisamente, sejam A^i e B_j dois vetores, representados por suas componentes contravariantes e covariantes, respectivamente. Suponhamos que a dimensão do espaço seja n, de modo que o número de componentes de um vetor é n. Considere a quantidade cujas componentes são todos os produtos da forma

$$A^{i_1}a^{i_2}\ldots A^{i_r}B_{j_1}\ldots B_{j_s}$$

Suas propriedades de transformação são

$$\begin{aligned} & A'^{\,l_1}\ldots A'^{\,l_r}B'_{m_1}\ldots B'_{m_s} = \\ = \; & \frac{\partial x'^{\,l_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial x'^{\,l_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{\,m_1}}\ldots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{\,m_s}}A^{i_1}A^{i_2}\ldots A^{i_r}B_{j_1}\ldots B_{j_s} \end{aligned} \tag{203}$$

Denominamos "tensor de tipo (r,s)" o objeto de componentes denotadas por $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ que se transformam assim:

$$T'^{\,l_1\ldots l_r}{}_{m_1\ldots m_s} = \frac{\partial x'^{\,l_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial x'^{\,l_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{\,m_1}}\ldots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{\,m_s}}T^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} \tag{204}$$

A ordem deste tensor é $r+s$, e o número de componentes é n^{r+2}. Um vetor contravariante é do tipo $(1,0)$; um vetor covariante, do tipo $(0,1)$.

Assim como o produto de vetores gera tensores, o produto de tensores gera novos tensores, de ordem mais elevada. Por exemplo, T^{rs}, S_{lm} geram um tensor

$$M^{rs}{}_{lm} = T^{rs}S_{lm} \tag{205}$$

O leitor verificará sem dificuldade que M é um tensor de tipo $(2,2)$.

Exercício: Um objeto tem componentes dadas por

$$T^{abcd}$$

e se sabe que seu produto contraído com qualquer tensor W_{abc} e qualquer vetor covariante S_m,

$$T^{abcd}W_{abc}S_m$$

é invariante. Provar qte T é um tensor de ordem 4 e tipo$(4,0)$.

Demonstração: Temos

$$T'^{\,abcd}W'_{abc}S'_d = T^{ijkl}W_{ijk}S_l \tag{206}$$

Mas

$$S_l = \frac{\partial x'^{\,d}}{\partial x^l}S'_d \tag{207}$$

e

$$W_{ijk} = \frac{\partial x'^{\,a}}{\partial x^i}\frac{\partial x'^{\,b}}{\partial x^j}\frac{\partial x'^{\,c}}{\partial x^k}W'_{abc} \tag{208}$$

Logo,

$$T'^{\,abcd}W'_{abc}S'_d = T^{ijkl}\frac{\partial x'^{\,a}}{\partial x^i}\frac{\partial x'^{\,b}}{\partial x^j}\frac{\partial x'^{\,c}}{\partial x^k}\frac{\partial x'^{\,d}}{\partial x^l}W'_{abc}S'_d \tag{209}$$

mas, como $W'^{\,abc}$ e S'_d são arbitrários, segue que

$$T'^{\,abcd} = \frac{\partial x'^{\,a}}{\partial x^i}\frac{\partial x'^{\,b}}{\partial x^j}\frac{\partial x'^{\,c}}{\partial x^k}\frac{\partial x'^{\,d}}{\partial x^l}T^{ijkl} \tag{210}$$

que era o que se queria demonstrar.

7.1 Construção de invariantes

A operação de contração é uma forma muito importante de obter invariantes, a partir de tensores. Considere o tensor $T^a_{\ b}$. Tem-se

$$T'^{\,a}_{\ \ b} = \frac{\partial x'^{\,a}}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial x'^{\,b}}T^m_{\ \ l} \tag{211}$$

e, contraíndo,

$$T'^{\,a}_{\ \ a} = \frac{\partial x'^{\,a}}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial x'^{\,a}}T^m_{\ \ l} = \delta^l_m T^m_{\ \ l} = T^l_{\ \ l} \tag{212}$$

ou seja,

$$T'^{\,a}_{\ \ a} = T^a_{\ \ a} \tag{213}$$

Sejam dois vetores $\vec{V}$ e $\vec{W}$. Representemos o primeiro por suas componentes contravariantes e o segundo por suas componentes covariantes. Podemos construir o tensor de componentes V^aW_b. Contraíndo, temos o invariante V^aW_a, ou seja,

$$V'^{\,a}W'_a = V^aW_a \tag{214}$$

Este invariante é o produto escalar usual dos dois vetores. Note que este invariante é normalmente apresentado na forma

$$V^aW_a = V^a g_{ab}W^b = g_{ab}V^aW^b \tag{215}$$

No espaço euclideano, e em coordenadas euclideanas, isto é

$$g_{11}V^1W^1 + g_{22}V^2W^2 + g_{33}V^3W^3 = V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z \tag{216}$$

enquanto que, no espaço-tempo de Minkowski,teríamos

$$\begin{aligned} V^a g_{ab} W^b &= g_{00}V^0W^0 + g_{11}V^1W^1 + g_{22}V^2W^2 + g_{33}V^3W^3 \\ &= V^0W^0 - V^1W^1 - V^2W^2 - V^3W^3 \end{aligned} \tag{217}$$

Exercícios:
(1)Dois vetores, $\vec{V}$ e $\vec{W}$, são dados em termos de suas componentes em coordenadas esféricas no espaço, V^r, V^θ, V^ϕ e as análogas para $\vec{W}$. Obter a expressão do produto escalar em termos das componentes.
(2)Dado um tensor qualquer, de componentes T^{ij}, pode-se construir o invariante $g_{ij}T^{ij}$. Por outro lado, as componentes de um tensor de segunda ordem podem ser escritas como uma matriz, o primeiro índice sendo o índice das linhas e o segundo, o das colunas. Na linguagem das matrizes, que invariante é este que descrevemos acima?
(3)O símbolo de Levi-Civita, ϵ_{ijk} é definido assim:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 0 \text{ se dois (ou mais) índices tiverem o mesmo valor} \\ \epsilon_{123} &= \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \end{aligned}$$

A definição é a mesma em qualquer sistema de coordenadas. Um resultado da teoria dos determinantes diz que, se A é uma matriz de elementos a_i^j, onde o índice inferior indica a linha, o superior a coluna,

$$\epsilon_{ijk} det A = a_i^l a_j^m a_k^n \epsilon_{lmn} \ .$$

Sejam

$$a_i^l \equiv \frac{\partial x'^{\,l}}{\partial x^i}$$

e, portanto, A é a matriz Jacobiana. Mostre que, se a matriz Jacobiana tiver determinante $+1$, ϵ_{ijk} é um tensor de tipo $(0,3)$.
(4) Considere, nas condições do problema acima, o tensor

$$\epsilon_{ijk} V^j W^k$$

que, graças às contrações realiadas,transforma-se como um vetor covariante (ou seja, é um vetor covariante). Mostre que este vetor é o produto vetorial usual do cálculo vetorial. Note que ele não é um verdadeiro vetor, pois só se transforma vetorialmente quando o determinante da matriz Jacobiana for $+1$. Dê um exemplo de uma mudança de coordenadas com matriz Jacobiana de determinante -1.

7.2 Simetrias de tensores

Suponhamos que o tensor T, de tipo $(2,0)$, tenha, num sistema de eixos, as componentes T^{ij}, e que a seguinte propriedade seja satisfeita:

$$T^{ij} = T^{ji} \ , \tag{218}$$

para quaisquer i e j. Vejamos se esta propriedade "se propaga" para outros sistemas de coordenadas. Sejam $T'^{\,ij}$ as novas componentes.

$$\begin{aligned}
T'^{\,ij} &= \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^l}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}T^{lm} \\
&= \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^l}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}T^{ml} \\
&= \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^m}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^l}T^{lm} \\
&= \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^l}\frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^m}T^{lm} \\
&= T'^{\,ji}
\end{aligned} \tag{219}$$

Portanto, a propriedade (218) vale em qualquer referencial: é uma propriedade do tensor, e não das coordenadas. Diz-se que um tensor é <u>simétrico</u> pela troca de dois índices quando as componentes em um sistema de coordenadas não mudam de valor quando os índices são trocados. Vimos que isto, então, vale em qualquer sistema de coordenadas. Um tensor é antissimétrico pela troca de dois índices quando

$$T^{ij} = -T^{ji}$$

Esta propriedade também vale em todos os referenciais, se valer em um.

Propriedades de simetria deste tipo existem também em tensores de ordem mais alta, mas sempre entre índices de mesmo tipo: troca de dois índices contravariantes, ou de dois covariantes. Propriedades de simetria ligadas à troca de um índice contravariante e um covariante não são propriedades tensoriais: podem existir num sistema e não em outros: são propriedades do sistema, e não dos tensores.

Um tensor de ordem 2 possui n^2 componentes, se n é a dimensão do espaço. Mas se ele for simétrico, essas componentes não serão todas independentes: se eu conhecer, por exemplo, T^{12}, já conheço a T^{21}. O número de componentes independentes de um tensor de segunda ordem simétrico é $\frac{n(n+1)}{2}$ (por que?). Um tensor de segunda ordem antissimétrico, isto é, tal que $T^{ij} = -T^{ji}$, tem todas as componentes "diagonais", isto é, com os índices iguais, nulas, pois a condição de antissimetria implica, para elas, em

$$T^{ii} = -T^{ii} \text{ sem soma}$$

O número de componentes independentes de um tensor de segunda ordem antissimétrico num espaço de dimensão $n > 2$ é igual a $\frac{n(n-1)}{2}$ (por que?). Assim, no espaço de dimensão 3, o número de componentes independentes é

3, igual ao número de componentes de um vetor, neste espaço. Por isso, um tensor de segunda ordem antissimétrico pode ser tratado como um vetor, no espaço usual, tomados certos cuidados. No espaço-tempo de Minkowski, que tem dimensão 4, um tensor antissimétrico tem 6 componentes independentes. O tensor de Maxwell, $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, e portanto tem, em cada sistema de referência, 6 componentes independentes, que são a 3 componentes de $\vec{E}$ e as 3 componentes de $\vec{B}$.

8 Coordenadas curvilíneas

A partir deste capítulo estaremos tratando de espaços de dimensão qualquer, e os índices que ornamentam as componentes dos tensores serão sempre letras latinas, independentemente do intervalo de valores em que estão definidos.

Em coordenadas cartesianas, se V^i é um campo vetorial, as derivadas parciais de suas componentes, por exemplo,

$$\partial_k V^i \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^k}$$

são as componentes de um tensor. De fato, se

$$V'^{\,j} = \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^i} V^i(x) \tag{220}$$

então

$$\frac{\partial V'^{\,j}}{\partial x'^{\,k}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\,k}} \left(\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^i} V^i(x) \right) = \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^{\,k}} V^i = \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^{\,k}} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \tag{221}$$

que é a fórmula da transformação de um tensor.

Este resultado dependeu do fato de que, em coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\,k}} \left(\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^i} \right) = 0 \tag{222}$$

pois $\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^i}$ é constante. Em coordenadas curvilíneas isto não é assim.

Sejam, por exemplo, x^i as coordenadas cartesianas do plano, e $x'^{\,i}$ as coordenadas polares no plano:

$$\begin{aligned} x'^{\,1} &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ x'^{\,2} &= \arctan \frac{x^1}{x^2} \end{aligned}$$

Vemos que, por exemplo,

$$\frac{\partial x'^{\,1}}{\partial x^1} = \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \tag{223}$$

e já se vê que os coeficientes de transformação não são constantes. Mas então, se

$$V'^{\,i} = \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^j} V^j(x) \tag{224}$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'^{\,i}(x')}{\partial x'^{\,l}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\,l}}\left(\frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^j}V^j(x)\right)\\ &= \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,l}}\frac{\partial V^j}{\partial x^m}+\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,l}}\frac{\partial^2 x'^{\,i}}{\partial x^m \partial x^j}V^j(x) \qquad (225)\end{aligned}$$

e isto não é a fórmula de transformação de um tensor.

Vimos então que, em coordenadas cartesianas, não há grandes dificuldades em definir derivadas de campos tensoriais: dado um campo tensorial $T_{ij}(x)$, as quantidades de componentes[6]

$$\partial_k T_{ij} \;\; , \partial_k \partial_l T_{ij} \;\; , \;\; \partial_k \partial^m T_{ij} \;\; , \;\; \text{etc} \qquad (226)$$

são campos tensoriais, sendo o *tipo* do tensor indicado, como de costume, pelo número de índices e suas posições.

A extensão do conceito de derivada a campos tensoriais referidos a coordenadas curvilíneas requer um esforço adicional. Por que, então, não usar sempre, e exclusivamente, coordenadas cartesianas? Por uma razão muito simples: espaços curvos não admitem coordenadas cartesianas.

Considere, por exemplo, a superfície de uma esfera, considerada como um espaço bidimensional. Podemos introduzir um sistema de coordenadas sobre a superfície procedendo assim: coloca-se, em um projetor de *slides*, um slide contendo um reticulado cartesiano (um papel milimetrado transparente, por exemplo) e projeta-se-o sobre a superfície esférica. Temos, assim, um sistema de coordenadas ortogonais sobre um trecho da superfície esférica. No entanto, como as retas do papel milimetrado serão projetadas como arcos de círculos, sobre a esfera, o sistema, lá, não será cartesiano. De fato, não pode existir um sistema cartesiano sobre uma superfície esférica, por razões muito profundas (de carater topológico). Como não queremos *a priori* excluir nenhum tipo de espaço, precisamos de um formalismo mais geral do que o cartesiano.

O que eu vou apresentar aqui é uma técnica de resolver este problema (derivar tensores em coordenadas curvilíneas) devida ao grande matemático

[6]O leitor se lembrará de que

$$\begin{aligned}\partial_i f &\equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}\\ \partial^i f &\equiv g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\end{aligned}$$

etc.

francês Elie Cartan, que é apresentada em seu famoso livro *Léçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Trata-se, em minha opinião, da maneira mais simples e lúcida de resolver este problema.

Em um sistema qualquer de coordenadas cartesianas (não necessariamente ortogonais) o quadrado do comprimento de um vetor de componentes X^i é dado por

$$g_{ij}X^iX^j$$

sendo $g_{ij} = \delta_{ij}$ no caso ortogonal.

Exemplo:
No caso de eixos cartesianos obliquos, formando um ângulo α, sejam X^i as componentes contravariantes do vetor (veja *Introdução aos tensores*, pg.6). O quadrado do comprimento do vetor será

$$g_{ij}X^iX^j = \left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2 + \left(X^3\right)^2 \tag{227}$$

de modo que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{228}$$

Em um sistema geral de coordenadas $u^1, \ldots, u^n$, consideremos dois pontos próximos, P, de coordenadas $u^1, u^2, \ldots, u^n$ e $P + dP$, de coordenadas $u^1 + du^1, u^2 + du^2, \ldots, u^n + du^n$. O quadrado da distância entre esses pontos é o quadrado do módulo do vetor que começa em P e termina em $P + dP$, isto é

$$ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = g_{ij}du^idu^j \tag{229}$$

Este ds^2 é denominado o <u>elemento de linha</u> neste sistema de coordenadas. Os símbolos g_{ij} são as componentes (covariantes) do tensor métrico.

Vamos construir, em torno do ponto P, um sistema de eixos adaptado às coordenadas u^i assim como o sistema de eixos $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ é adpatado às coordenadas cartesianas ortogonais. A função $P(u^1, \ldots, u^n)$ associa, a cada n-upla de coordenadas, um ponto do espaço. Alternativamente, podemos representá-la por $\vec{r}(u^1, \ldots, u^n)$, o vetor da origem ao ponto P. Considere os vetores

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} &(230)\\ ..... &= .... &(231)\\ \vec{e}_n &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^n} &(232)\end{aligned}$$

O vetor $\vec{e}_i$ é tangente, em P, à curva coordenada u^i, ou seja, à curva, passando por P, ao longo da qual apenas a coordenada u^i varia, as outras permanecendo constantes.

Exemplo: em coordenadas cartesianas,

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\\ &= \frac{\partial x}{\partial r}\vec{\imath} + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{k}\\ &= \sin\theta\cos\phi\vec{\imath} + \sin\theta\sin\phi\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k}\end{aligned}$$

onde usamos as fórmulas de transformação

$$\begin{aligned}x &= r\sin\theta\cos\phi &(233)\\ y &= r\sin\theta\sin\phi &(234)\\ z &= r\cos\theta &(235)\end{aligned}$$

Procedendo analogamente, obteremos

$$\begin{aligned}\vec{e}_2 &= r\cos\theta\cos\phi\vec{\imath} + r\cos\theta\sin\phi\vec{\jmath} - r\cos\theta\vec{k} &(236)\\ \vec{e}_3 &= -r\sin\theta\sin\phi\vec{\imath} + r\sin\theta\cos\phi\vec{\jmath} &(237)\end{aligned}$$

Note-se que $\vec{e}_\imath.\vec{e}_\jmath = 0$, para $ineqj$, o que justifica o nome de coordenadas ortogonais. Por outro lado,

$$\vec{e}_2.\vec{e}_2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\phi = r^2 \tag{238}$$

ou seja, os vetores não são ortonormais.

É claro que, da definição dos $\vec{e}_i$, segue que

$$d\vec{r} = du^1\vec{e}_1 + du^2\vec{e}_2 + \ldots + du^n\vec{e}_n \tag{239}$$

e daí segue imediatamente que

$$ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = g_{ij}du^i du^j = (\vec{e}_i.\vec{e}_j)du^i du^j \tag{240}$$

ou

$$g_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e}_j \tag{241}$$

Exemplo: no caso das coordenadas esféricas, temos, convencionando denotar por (u^1, u^2, u^3) a tripla (r, θ, ϕ),

$$\vec{e}_1.\vec{e}_1 = \sin^2\theta\cos^@\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = 1 \quad (242)$$
$$\vec{e}_2.\vec{e}_2 = r^2 \quad (243)$$
$$\vec{e}_3.\vec{e}_3 = r^2\sin^2\theta \quad (244)$$

Logo, os g_{ij} deste sistema de coordenadas são

$$g_{11} = 1 \quad (245)$$
$$g_{22} = r^2 \quad (246)$$
$$g_{33} = r^2\sin^2\theta \quad (247)$$

8.1 Como caracterizar um campo constante?

Se um campo vetorial for constante, isto é, tiver o mesmo vetor associado a todos os pontos (campo uniforme, no dialeto dos físicos), esperaríamos que as derivadas de suas componentes fossem nulas em toda a parte. Para examinar um caso bem simples, tomemos o campo vetorial que associa, a cada ponto, o vetor $\vec{\imath}$, ou seja, o vetor de componentes cartesianas $(1, 0, 0)$. Temos então

$$\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} \quad (248)$$

ou seja, as componentes cartesianas de $\vec{V}$ são

$$V_x = 1$$
$$V_y = 0$$
$$V_z = 0$$

É claro que as derivadas parciais das componentes são todas nulas, como esperávamos. Contudo, as coisas são bem diferentes se o campo é descrito por coordenadas curvilíneas.

Em coordenadas esféricas, por exemplo, vimos que

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\vec{\imath} + \sin\theta\sin\phi\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k} \quad (249)$$
$$\vec{e}_\theta = r\cos\theta\cos\phi\vec{\imath} + r\cos\theta\sin\phi\vec{\jmath} - r\sin\theta\vec{k} \quad (250)$$
$$\vec{e}_\phi = -r\sin\theta\sin\phi\vec{\imath} + r\sin\theta\cos\phi\vec{\jmath} \quad (251)$$

Invertendo estas relações, achamos

$$\vec{\imath} = \sin\theta\cos\phi\vec{e}_r + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\vec{e}_\theta - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi \quad (252)$$

O campo vetorial $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath}$ fica então expresso por

$$\vec{V}(r, \theta, \phi) = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\phi \vec{e}_\phi \tag{253}$$

com

$$V_r = \sin\theta\cos\phi \tag{254}$$

$$V_\theta = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} \tag{255}$$

$$V_\phi = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \tag{256}$$

É claro que as derivadas parciais dessas componentes não são nulas. Precisamos então investigar se existe alguma extensão do conceito de derivada que tenha esta propriedade fundamental: um campo constante é tal que as derivadas de suas componentes são nulas em qualquer sistema de coordenadas. Esta derivada será chamada derivada covariante.

8.2 Conexão entre referenciais naturais

Aprendemos a construir a base natural no ponto P, associada às corodenadas curvilíneas u^i. Este ponto é genérico, de forma que sabemos construir a base natural em qualquer ponto. Vamos agora explorar a conexão que existe entre bases naturais em pontos vizinhos que decorre do fato de que os vetores das bases naturais são funções diferenciáveis. Em última análise, gostaríamos de construir n campos vetoriais, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, que tivessem esta propriedade: em cada ponto P, o valor desses campos vetoriais seria a base natural naquele ponto.

Seja $P + dP$ o ponto vizinho, de coordenadas $(u_1 + du^1, \ldots, u^n + du^n)$. A base natural é constituída pelos vetores

$$\vec{e}_i(u^i + du^i) = \vec{e}_i(u^i) + d\vec{e}_i(u^i) \tag{257}$$

Omitiremos o argumento dos campos de vetores que se referem ao ponto P. Os $d\vec{e}_i$ da equação acima podem ser expandidos na base natural em P. Seja esta expansão dada por

$$d\vec{e}_i = {\omega_i}^k \vec{e}_k \tag{258}$$

onde os ${\omega_i}^k$, a determinar, são funções do ponto P e das diferenças du^i entre as coordenadas de $P + dP$ e P. Podemos, portanto, escrever

$${\omega_i}^k = \Gamma^k_{i1} du^1 + \Gamma^k_{i2} du^2 + \ldots + \Gamma^k_{in} du^n \tag{259}$$

ou seja,

$$d\vec{e}_i = \Gamma^k_{ir} du^r \vec{e}_k \tag{260}$$

Os coeficientes Γ^k_{ij}, também a determinar, chmam-se coeficientes da conexão[7].

Antes de prosseguir precisamos de um pouco mais de notação: definimos:

$$\omega_{ij} \equiv g_{jk}\omega_i{}^k \tag{261}$$

$$\Gamma_{j,ir} \equiv g_{jk}\Gamma^k_{ir} \tag{262}$$

Então

$$\omega_{ij} = g_{jk}\omega_i{}^k = g_{jk}\Gamma^k_{ir}du^r = \Gamma_{j,ir}du^r$$

Consideremos agora os campos vetoriais $\vec{e}_i$, $i = 1..n$, que, em cada ponto P, fornecem a base natural naquele ponto. Temos:

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = g_{ij} \tag{263}$$

Diferenciando esta relação,

$$d\vec{e}_i.\vec{e}_j + \vec{e}_i.d\vec{e}_j = dg_{ij} \tag{264}$$

e

$$d\vec{e}_i = \omega_i{}^k \vec{e}_k$$

$$d\vec{e}_j = \omega_j{}^k \vec{e}_k$$

Logo,

$$\omega_i{}^k\left(\vec{e}_k.\vec{e}_j\right) + \omega_j{}^k\left(\vec{e}_i.\vec{e}_k\right) = dg_{ij} \tag{265}$$

ou

$$g_{jk}\omega_i{}^k + g_{ik}\omega_j{}^k = dg_{ij} \tag{266}$$

ou, finalmente,

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = dg_{ij} \tag{267}$$

As relações (267) não são suficientes para determinar as ingógnitas, que são os Γ^i_{jk}. Ainda não exploramos completamente, porém, as relações

$$d\vec{r} = \vec{e}_i du^i \text{ e} \tag{268}$$

$$d\vec{e}_i = \omega^k_i \vec{e}_k \tag{269}$$

De (268) vem

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} = \vec{e}_i \tag{270}$$

[7] Na literatura clássica são mais conhecidos como *símbolos de Christoffel*.

Logo,

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^j} \tag{271}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial u^i} \tag{272}$$

Mas, como a função $\vec{r}(u^i)$ é diferenciável,

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \tag{273}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial u^i} \tag{274}$$

A equação (274), que exprime a igualdade das derivadas mistas que diferem pela ordem da derivação, denomina-se *condição de integrabilidade.* Faremos uso muito freqüente de outras condições de integrabilidade.

Como

$$d\vec{e}_i = \Gamma^r_{is} \vec{e}_r du^s \tag{275}$$

temos

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^s} = \Gamma^r_{is} \vec{e}_r \tag{276}$$

Escolhendo adequadamente os índices, podemos escrever (274) como

$$\Gamma^r_{ij} \vec{e}_r = \Gamma^r_{ji} \vec{e}_r \tag{277}$$

e, portanto,

$$\Gamma^r_{ij} = \Gamma^r_{ji} \tag{278}$$

da qual segue ainda que

$$\Gamma_{l,ij} = \Gamma_{l,ji} \tag{279}$$

Retomemos a equação (267). Escrevendo

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \Gamma_{j,il} du^l \\ \omega_{ji} &= \Gamma_{i,jl} du^l \\ dg_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \end{aligned}$$

obtemos, de (267).

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,jl} \tag{280}$$

Estas relações vão nos permitir a determinação dos coeficientes da conexão Γ^i_{jk}. O procedimento é simples: escrevo três vezes (280), permutando circularmente os índices (i,j,l):

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,jl} \tag{281}$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} = \Gamma_{i,lj} + \Gamma_{l,ij} \tag{282}$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \Gamma_{l,ji} + \Gamma_{j,li} \tag{283}$$

Somando as duas primeiras e subtraíndo delas a terceira, temos

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,jl} + \Gamma_{i,lj} + \Gamma_{l,ij} - \Gamma_{l,ji} - \Gamma_{j,li} \tag{284}$$

$$= 2\Gamma_{i,lj} \tag{285}$$

Portanto,

$$\Gamma_{i,lj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}\right) \tag{286}$$

e

$$\Gamma^k_{lj} = g^{ki}\Gamma_{i,lj} \tag{287}$$

Somos agora capazes de calcular $d\vec{e}_i$:

$$d\vec{e}_i = \omega_i{}^k \vec{e}_k = \Gamma^k_{il}\vec{e}_k du^l \tag{288}$$

ou, eqüivalentemente,

$$\frac{\vec{e}_i}{\partial u^l} = \Gamma^k_{il}\vec{e}_k \tag{289}$$

Seja $\vec{V}$ um campo vetorial. Podemos escrever

$$\vec{V} = v^k \vec{e}_k \tag{290}$$

Diferenciando,

$$d\vec{V} = d\left(V^k \vec{e}_k\right) = dV^k \vec{e}_k + V^k d\vec{e}_k \tag{291}$$

Como

$$dV^k = \frac{\partial V^k}{\partial u^l} du^l$$

$$d\vec{e}_k = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial u^l} ,$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
d\vec{V} &= \frac{\partial V^k}{\partial u^l} du^l \vec{e}_k + V^k \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial u^l} && (292)\\
d\vec{V} &= \frac{\partial V^k}{\partial u^l} du^l \vec{e}_k + v^k \Gamma^m_{kl} du^l \vec{e}_m && (293)\\
d\vec{V} &= \left(\frac{\partial V^k}{\partial u^l} + V^m \Gamma^k_{ml} \right) \vec{e}_k du^l && (294)
\end{aligned}
$$

O campo será constante se todos os números

$$
\frac{\partial V^k}{\partial u^l} + V^m \Gamma^k_{ml} = 0 \qquad (295)
$$

Depreende-se daí que esta é a quantidade que realmente mede a variação do campo vetorial com a posição. Vamos chamar o termo entre parênteses da eq.(294) de <u>derivada covariante</u> do campo vetorial $\vec{V}$. Mais precisamente,

$$
V^k_{;\,l} \equiv \frac{\partial V^k}{\partial u^l} + V^m \Gamma^k_{ml} \qquad (296)
$$

é a derivada covariante da componente V^k em relação à variável u^l. Note-se que, em coordenadas cartesianas, $\Gamma^k_{ml} = 0$, de modo que, em coordenadas cartesianas, as derivadas covariantes coincidem com as derivadas parciais.

Vamos mostrar agora que o campo constante que, em coordenadas cartesianas, tem a expressão $\vec{V} = \vec{\imath}$, e que, em coordenadas esféricas, é dado por

$$
\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\phi \vec{e}_\phi \qquad (297)
$$

com

$$
\begin{aligned}
V_r &= \sin\theta \cos\phi && (298)\\
V_\theta &= \frac{\cos\theta \cos\phi}{r}\\
V_\phi &= -\frac{\sin\phi}{r \sin\theta}
\end{aligned}
$$

tem as derivadas covariantes das componentes todas nulas. Para isto precisamos de alguns resultados que serão obtidos em forma de exercícios:
Exercício 1: Considere as coordenadas polares no plano, dadas por

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos\phi\\
y &= r \sin\phi
\end{aligned}
$$

Determine os Γ^i_{jk}.

Exercício 2: Considere as coordenadas esféricas no espaço, dadas por

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Determine os Γ^i_{jk}.
Resposta:

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{r} \tag{299}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r \tag{300}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot\theta \tag{301}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\phi \tag{302}$$

$$\Gamma^{r}_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta \tag{303}$$

Exercício 3: Mostre que as derivadas covariantes do campo $\vec{V}$, descrito em (298) são de fato nulas.

8.3 Algumas relações úteis

8.3.1 Digressão sobre matrizes e determinantes

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

cujo determinante

$$detA = ad - bc \neq 0 \ .$$

Seja A^{ik} o cofator, em A, do elemento A_{ik}. Assim,

$$\begin{aligned} A^{11} &= d \\ A^{12} &= -b \\ A^{21} &= -c \\ A^{22} &= a \end{aligned}$$

A inversa da matriz A pode ser construída assim:

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{A^{ij}}{detA}$$

que, no caso, dá

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$

É facil verificar que, de fato, $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$, onde este último 1 é, naturalmente, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considere agora g_{ij}, a componente genérica do tensor métrico, como o elemento ij da matriz $\mathbb{G}$, de modo que

$$(\mathbb{G})_{ij} = g_{ij}$$

Seja $g = det\mathbb{G}$. Por definição de métrica. $g \neq 0$. Podemos, então construir a matriz $\mathbb{G}^{-1}$. Denotando por G^{ij} o cofator do elemento g_{ij}, temos

$$\left(\mathbb{G}^{-1}\right)_{ij} = \frac{G^{ij}}{g} \tag{304}$$

Por razões históricas se escreve

$$\left(\mathbb{G}^{-1}\right)_{ij} = g^{ij} \; .$$

Então,

$$g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g} \tag{305}$$

e

$$G^{ij} = g \; g^{ij} \tag{306}$$

Como

$$\left(\mathbb{G}^{-1}\right)_{ik} (\mathbb{G})_{kl} = \delta_{il} \tag{307}$$

temos

$$g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l \tag{308}$$

Note que, se g_{ij} for diagonal,

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} \quad \text{sem soma!} \tag{309}$$

8.4 Fórmula importante

Da teoria dos determinantes, temos

$$g = \sum_\alpha g_{i\alpha} G^{i\alpha} \quad \text{(soma só sobre } \alpha) \tag{310}$$

O determinante é uma função contínua e diferenciável de seus elementos. Podemos, então calcular

$$\frac{\partial g}{\partial g_{i\beta}} = \sum_\alpha \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial g_{i\beta}} G^{i\alpha} + \sum_\alpha g_{i\alpha} \frac{\partial G^{i\alpha}}{\partial g_{i\beta}} \tag{311}$$

Mas $\frac{\partial G^{i\alpha}}{\partial g_{i\beta}} = 0$, pois $G^{i\alpha}$ não contém o elemento $g_{i\beta}$. Logo,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{i\beta}} = \sum_\alpha \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial g_{i\beta}} G^{i\alpha} \tag{312}$$

$$= \sum_\alpha \delta_{\alpha\beta} G^{i\alpha} \tag{313}$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{i\beta}} = G^{i\beta} \tag{314}$$

Usando (306),

$$\frac{\partial g}{\partial g_{i\beta}} = g\ g^{i\beta} \tag{315}$$

Podemos agora calcular a derivada de g em relação às coordenadas:

$$\frac{\partial g}{\partial u^l} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = g\ g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \tag{316}$$

ou

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^l} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \tag{317}$$

Este fórmula possui importantes aplicações.

8.4.1 Aplicações

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{il} &= g^{im} \Gamma_{m,il} \\ &= g^{im} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial u^m} \right) \end{aligned}$$

Mas

$$g^{im} \frac{\partial g_{ml}}{\partial u^i} = g^{im} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^m} \tag{318}$$

e então,

$$\Gamma^i_{il} = g^{im} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^l} \tag{319}$$

Usando (317),

$$\Gamma^i_{il} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^l} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u^l} = \frac{\partial}{\partial u^l} \log \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{g}}{\partial u^l} \tag{320}$$

Ou seja,

$$\Gamma^i_{il} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^l} \tag{321}$$

2. Divergente em coordenadas curvilíneas.
Se A^i é um campo vetorial, definimos o seu divergente como $A^i_{;i}$. De fato, para coordenadas cartesianas,

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$$

No caso geral, temos

$$\begin{aligned} A^i_{;i} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{il} A^l \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^l} A^l && (322) \\ &= \frac{\partial A^l}{\partial x^l} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^l} A^l && (323) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\sqrt{g} A^l \right) && (324) \end{aligned}$$

ou seja,

$$div \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\sqrt{g}\, A^l \right) \tag{325}$$

3. O laplaceano em coordenadas curvilíneas.
Considere o campo vetorial

$$A^i = g^{il} \partial_l \phi$$

onde ϕ é um campo escalar.

$$A^i_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\sqrt{g} g^{li} \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \right) \tag{326}$$

Para coordenadas cartesianas $A^i_{;\,i} = \vec{\nabla}^2 \phi$. Logo, no caso geral,

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\sqrt{g} g^{li} \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \right) \tag{327}$$

Exercício: mostre que, para coordenadas tais que

$$ds^2 = h_1^2 \left(du^1 \right)^2 + h_2^2 \left(du^2 \right)^2 + h_3^2 \left(du^3 \right)^2$$

tem-se a *fórmula de Lamé*:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^3} \right) \right\} \tag{328}$$

8.5 Transporte paralelo

Vamos ver aqui uma outra maneira de obter a derivada covariante, que é um contexto adequado para introduzir o conceito de *transporte paralelo*.

Vimos que a diferença entre a derivada parcial usual e a derivada covariante vem do fato de que a base natural muda de ponto para ponto. Por isso, a variação que as componentes de um campo vetorial sofrem quando se passa de um ponto para um outro vizinho é mais complicada, porque a própria base em relação à qual as componentes são medidas é alterada.

No entanto é possível obter a variação das componentes sem se preocupar com os eixos móveis usando o seguinte artifício: sejam $V^i(P)$ as componentes do campo num ponto P. Sendo funções contínuas de diferenciáveis, seus valores em $P + dP$ serão dados pela fórmula dos acréscimos finitos:

$$V^i(P+dP) = V^i(P) + du^l \frac{\partial V^i}{\partial u^l} \tag{329}$$

Para saber a variação dessas componentes, basta subtrair da expressão acima a variação análoga das componentes de um campo uniforme que, no ponto P, tenha o mesmo valor, $\vec{V}(P)$! Ora, um campo uniforme é tal que

$$d\vec{V} = dV^i \vec{e}_i + V^i d\vec{e}_i = 0 \tag{330}$$

ou seja,

$$dV^i \vec{e}_i = -V^i \Gamma^k_{il} du^l \vec{e}_k \tag{331}$$

ou, ajustando os índices,

$$dV^i \vec{e}_i = -V^k \Gamma^i_{kl} du^l \vec{e}_i \tag{332}$$

ou, finalmente

$$dV^i = -V^k \Gamma^i_{kl} du^l \tag{333}$$

O procedimento então é este: tomamos o valor do campo V no ponto P, e o estendemos, num entorno de P que inclui o ponto $P + dP$, a um campo uniforme. No ponto $P + dP$, calculamos a diferença entre o valor real da componente do campo, $V(P+dP)$, e o valor do campo uniforme neste mesmo ponto, que é dada por

$$V^i + \frac{\partial V^i}{\partial u^l} du^l - \left(V^i - V^k \Gamma^i_{kl} du^l\right) = du^l \left(\frac{\partial V^i}{\partial u^l} + V^k \Gamma^i_{kl} du^l\right) \tag{334}$$

Esta expressão se denomina diferencial covariante de V^i. O termo entre parênteses, como vimos, é a derivada covariante.

A operação de, a partir do valor de um campo vetorial num ponto, construir um campo uniforme em torno a este ponto se denomina transporte paralelo infinitesimal. Um vetor transportado paralelamente de um ponto para outro cujas coordenadas diferem das do primeiro por infinitésimos du^l, têm suas componentes modificadas como expresso na eq. (333).

Para não usar o mesmo símbolo para duas coisas diferentes, vamos, a partir de agora, denotar a variação das componentes *por transporte paralelo* por $d_{||}V^i$. Assim, a eq.(333) se escreverá

$$dV^i_{||} = -V^k\Gamma^i_{kl}du^l \tag{335}$$

8.5.1 Transporte paralelo de outros objetos

Um campo escalar é totalmente independente de eixos de coordenadas, por isso, um campo escalar uniforme tem, sempre, um valor igual em todos os pontos. Segue então que, se ϕ é um campo escalar,

$$d_{||}\phi = 0 \tag{336}$$

Dado um campo vetorial $\vec{V}$, posso construir um campo escalar utilizando as componentes contravariantes e as covariantes:

$$V^iV_i \text{ é um escalar, se } \vec{V} \text{ for um campo vetorial} \tag{337}$$

Mas então,

$$\begin{aligned} 0 &= d_{||}\left(V^iV_i\right) = V^id_{||}V_i + V_id_{||}V^i \\ &= V^id_{||}V_i + V_i\left(-\Gamma^i_{kl}V^kdu^l\right) \end{aligned} \tag{338}$$

$$V^id_{||}V_i = V_iV^k\Gamma^i_{kl}du^l = V_kV^i\Gamma^k_{il}du^l \tag{339}$$

$$d_{||}V_i = V_k\Gamma^k_{il}du^l \tag{340}$$

Por outro lado,

$$V_iV^i = g_{ij}V^iV^j \tag{341}$$

logo,

$$\begin{aligned} 0 &= d_{||}\left(V_iV^i\right) = d_{||}\left(g_{ij}V^iV^j\right) \\ &= d_{||}g_{ij}V^iV^j + g_{ij}\left(d_{||}V^i\right)V^j + g_{ij}V^id_{||}V^j \\ &= d_{||}g_{ij}V^iV^j + g_{ij}\left(-\Gamma^i_{kl}V^kdu^l\right)V^j + g_{ij}V^i\left(-\Gamma^j_{kl}V^kdu^l\right) \\ 0 &= \left(d_{||}g_{ij} - \Gamma^m_{il}g_{mj}du^l - \Gamma^m_{jl}g_{im}dU^l\right)V^iV^j \end{aligned} \tag{342}$$

Desta última equação não se pode inferir, apesar da arbitrariedade das componentes V^i, que o termo entre parênteses é nulo. De fato, como $V^iV^j = V^jV^i$, seria suficiente que o termo entre parênteses fosse antissimétrico na troca dos índices i, j um pelo outro, para que expressão desse zero. Mas o termo em questão é *simétrico* por esta troca, e então podemos nos assegurar de que ele tem de ser zero. Logo,

$$d_{||}g_{ij} = \Gamma^m_{il}g_{mj}du^l + \Gamma^m_{jl}g_{im}du^l \tag{343}$$

Isto ainda pode ser simplificado para

$$d_{||}g_{ij} = \left(\Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,jl}\right)du^l \tag{344}$$

Finalmente, substituíndo os $\Gamma_{j,il}$ pelas suas expressões em termos das derivadas parciais de g_{ij}, temos

$$d_{||}g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}du^l \tag{345}$$

Segue daí um resultado muito importante:

$$g_{ij;\,l} = 0 \tag{346}$$

De fato,

$$dg_{ij} - d_{||}g_{ij} = g_{ij;\,l}du^l = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)du^l = 0 \tag{347}$$

8.6 Derivada covariante de um tensor qualquer

Já vimos que

$$V^k_{;\,l} = \frac{\partial v^k}{\partial u^l} + V^m\Gamma^k_{ml} \tag{348}$$

Estende-se o conceito de derivada covariante a tensores de outro tipo impondo-lhe as propriedades gerais de toda derivação:

$$\begin{aligned}
(A+B)_{;\,l} &= A_{;\,l} + B_{;\,l} \\
(kA)_{;\,l} &= l\,(A)_{;\,l} \\
(AB)_{;\,l} &= (A)_{;\,l}\,B + A\,(B)_{;\,l}
\end{aligned}$$

onde A e B são tensores e k é uma constante.

Por exemplo, A_iB^i é um escalar, cuja derivada covariante é a derivada parcial usual. Então,

$$\begin{aligned}
\left(A_iB^i\right)_{;\,k} &= \frac{\partial\left(A_iB^i\right)}{\partial u^k} = \frac{\partial A_i}{\partial u^k}B^i + A_i\frac{\partial B^i}{\partial u^k} \\
&= A_{i;\,k}B^i + A_iB^i_{;\,k}
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^k} B^i = A_{i;\,k} B^i + A_m \Gamma^m_{ki} B^i \tag{349}$$

ou,

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial u^k} - \Gamma^m_{ki} A_m \tag{350}$$

que dá as derivadas covariantes do campo $\vec{A}$ expresso em componentes covariantes.

Para obter as derivadas covariantes de um tensor de segunda ordem, tomamos o caso particular $T^{ik} = A^i B^k$.

$$\begin{aligned}
T^{ik}_{;\,l} &= \left(A^i B^k\right)_{;\,l} \\
&= A^i_{;\,l} B^k + A_i B^k_{;\,l} \\
&= \left(\frac{\partial A^i}{\partial u^l} + \Gamma^i_{lm} A^m\right) B^k + A^i \left(\frac{\partial b^k}{\partial u^l} + \Gamma^k_{lm} B^m\right) \\
&= \left(\frac{\partial A^i}{\partial u^l} B^k + A^i \frac{\partial B^k}{\partial u^l}\right) + \Gamma^i_{lm} A^m B^k + \Gamma^k_{lm} A^i B^m
\end{aligned}$$

Retomando a notação em termos de T^{ij}, a última equação é escrita

$$T^{ik}_{;\,l} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial u^l} + \Gamma^i_{lm} T^{mk} + \Gamma^k_{lm} T^{im} \tag{351}$$

Como as derivadas covariantes dependem só das propriedades de transformação, esta expressão, apesar de deduzida tomando-se um particular tensor de segunda ordem duas vezes contravariante, vale para qualquer tensor deste tipo.

Como mais um exemplo, calculemos as derivadas covariantes de um tensor de segunda ordem expresso pelas suas componentes mistas, T^i_s. O principal ingrediente é o fato de que

$$g_{ij;\,l} = 0$$

De fato,

$$\begin{aligned}
T^i_{s;\,l} &= \left(g_{sk} T^{ik}\right)_{;\,l} = g_{sk}\, T^{ik}_{;\,l} \\
&= g_{sk} \left(\frac{\partial T^{ik}}{\partial u^l} + \Gamma^i_{lm} T^{mk} + \Gamma^k_{lm} T^{im}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^l}\left(g_{sk} T^{ik}\right) - T^{ik} \frac{\partial g_{sk}}{\partial u^l} + g_{sk} \Gamma^i_{lm} T^{mk} + g_{sk} \Gamma^k_{lm} T^{im} \\
&= \partial_l T^i_s - T^{ik} \partial_l g_{sk} + \Gamma^i_{lm} T^s_m + \Gamma_{s,lm} T^{im} \\
&= \partial_l T^i_s + \Gamma^i_{lm} T^m_s + T^{im} \Gamma_{s,lm} - T^{im} \partial_l g_{sm}
\end{aligned}$$

Os dois últimos termos somam

$$\begin{aligned}\Gamma_{s,lm} - \partial_l g_{sm} &= \frac{1}{2}\left(\partial_l g_{sm} + \partial_m g_{sl} - \partial_s g_{lm}\right) - \partial_l g_{sm} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\partial_l g_{sm} - \partial_m g_{sl} + \partial_s g_{lm}\right) \\ &= -\Gamma_{m,sl}\end{aligned}$$

Juntando tudo, temos

$$T^i_{s;\,l} = \partial_l T^i_s + \Gamma^i_{lm} T^m_s - \Gamma^m_{sl} T^i_m \tag{352}$$

Seguindo sistematicamente este procedimento pode-se obter a derivada covariante de qualquer tensor.

8.7 Geodésicas

Sejam x^i as coordenadas, e $x^i(t)$ uma curva. Então, $dx^i(t)/dt$ são vetores tangentes a ela. Em particular, se o parâmetro for o comprimento de arco s, o campo de velocidades dx^i/ds é formado por vetores unitários. De fato,

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1\ , \tag{353}$$

pois

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{dx^i}{ds}ds\frac{dx^j}{ds}ds = g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}ds^2 \tag{354}$$

Seja V^i um campo vetorial e $x^i(s)$ uma curva. Chama-se restrição de v^i a $x^i(s)$ à função

$$V^i\left(x^i(s)\right)$$

que representa os valores do campo vetorial nos pontos da curva. Diz-se[8] que um campo vetorial V^i é paralelo à curva $x^i(s)$ quando

$$\frac{dV^i}{ds} = -\Gamma^i_{kl}V^k\frac{dx^l}{ds}\ , \tag{355}$$

que significa que os valores do campo vetorial nos pontos da curva são obtidos por transporte paralelo dos valores em pontos anteriores da curva (os pontos da curva são ordenados naturalmente pela parametrização). Chama-se geodésica uma curva tal que seu campo de velocidades é paralelo à curva

[8]Para ser mais preciso, eu digo. A nomenclatura entre os matemáticos é um pouco diferente.

(note que, no espaço euclideano, esta é uma caracterização da reta). Como o campo de velocidades é $\frac{dx^i}{ds}$, temos

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \ , \tag{356}$$

equação que deve ser satisfeita por toda geodésica.

Nota: nos espaços em que $ds^2 \geq 0$, ditos *espaços riemannianos*, a geodésica pode também ser caracterizada como a curva de menor comprimento entre dois pontos. Em espaços que não são riemannianos, como os espaços-tempos da relatividade geral, o comprimento de uma curva entre dois pontos distintos pode ter qualquer sinal, ou ser nulo. Neste caso a propriedade de ser uma curva de mínimo comprimento não mais caracteriza a geodésica. A definição dada acima serve em todos os casos. Na geometria riemanniana, os conceitos de *curva mais próxima de uma reta* e de *curva mais curta* coincidem.

Exemplo 1: plano, coordenadas polares.
A equação das geodésicas é:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \tag{357}$$

ou

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^r_{\phi\phi}\frac{d\phi}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{358}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \Gamma^\phi_{rr}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\Gamma^\phi_{\phi r}\frac{d\phi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \tag{359}$$

ou ainda,

$$\frac{d^2r}{ds^2} - r\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{360}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{361}$$

Primeira pergunta: $\phi =$ constante é geodésica?
$\frac{d\phi}{ds} = 0$ dá:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = 0 \ \text{ e portanto } \ r = Ks + K' \tag{362}$$

A resposta é sim. São segmentos de retas radiais.
Segunda pergunta: $r =$ constante é geodésica?

$$\frac{dr}{ds} = 0 \ \text{ dá } \ \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \ \text{ e } \ \frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{363}$$

Isto não é uma curva! Logo, não há geodésicas com r constante. O que é óbvio! r constante são arcos de círculos, e não retas.

Exemplo 2: Superfície esférica de raio 1: os ângulos θ e ϕ são coordenadas.

$$\vec{r} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \tag{364}$$
$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \tag{365}$$
$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = -\sin\theta\sin\phi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\phi\,\vec{\jmath} \tag{366}$$

$$\vec{e}_\theta.\vec{e}_\phi = 0 \tag{367}$$
$$\vec{e}_\theta.\vec{e}_\theta = 1 \tag{368}$$
$$\vec{e}_\phi.\vec{e}_\phi = \sin^2\theta \tag{369}$$

de onde segue que

$$g_{\theta\phi} = 0 \tag{370}$$
$$g_{\theta\theta} = 1 \tag{371}$$
$$g_{\phi\phi} = \sin^2\theta \tag{372}$$

Os coeficientes da conexão são $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$, $\Gamma^\theta_{\theta\phi}$, $\Gamma^\theta_{\phi\phi}$, $\Gamma^\phi_{\theta\theta}$,$\Gamma^\phi_{\theta\phi}$, $\Gamma^\phi_{\phi\phi}$ e , felizmente, são quase todos nulos. Os não-nulos são:

$$\Gamma_{\theta,\phi\phi} = -\sin\theta\cos\phi \tag{373}$$
$$\Gamma_{\phi,\theta\phi} = \sin\theta\cos\phi \tag{374}$$

Daí se tira

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\phi \tag{375}$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \tag{376}$$

onde usamos $g^{\theta\theta} = 1$ e $g^{\phi\phi} = \frac{1}{\sin^2\theta}$.

A equação das geodésicas é

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\frac{d\phi}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{377}$$
$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + 2\Gamma^\phi_{\theta\phi}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{378}$$

que dá

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta\cos\phi\frac{d\phi}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{379}$$
$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{380}$$

Note-se que neste espaço (superfície de uma esfera) não há retas: as geodésicas serão as curvas “mais retas” neste espaço.

Vamos mostrar que o equador (ou melhor, qualquer segmento dele) é uma geodésica: o equador é $\theta = \frac{\pi}{2}$. De fato, as equações dão, neste caso,

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = 0 \text{ ou } \phi = as + b \tag{381}$$

O leitor poderá mostrar sem dificuldade o seguinte:
Exercício: Nenhum outro paralelo (no sentido geográfico) é geodésica.
Exercício: Os meridianos são geodésicas.
Resumindo, as geodésicas são trechos de círculos máximos.

9 Curvatura

Vimos anteriormente que

$$\frac{\partial \vec{e}_\imath}{\partial u^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k \tag{382}$$

Derivando mais uma vez, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{e}_\imath}{\partial u^l \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^l}\left(\Gamma^k_{ij}\vec{e}_k\right) && (383)\\
&= \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u^l}\vec{e}_k + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial u^l} && (384)\\
&= \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u^l}\vec{e}_k + \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{kl}\vec{e}_m && (385)
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \vec{e}_\imath}{\partial u^l \partial u^j} = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^l} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{kl}\right)\vec{e}_m \tag{386}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2 \vec{e}_\imath}{\partial u^j \partial u^l} = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{il}\Gamma^m_{kj}\right)\vec{e}_m \tag{387}$$

Como devemos ter

$$\frac{\partial^2 \vec{e}_\imath}{\partial u^l \partial u^j} = \frac{\partial^2 \vec{e}_\imath}{\partial u^j \partial u^l} \tag{388}$$

segue que

$$\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^l} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{kl}\right)\vec{e}_m = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{il}\Gamma^m_{kj}\right)\vec{e}_m \tag{389}$$

ou

$$\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^m_{kj} = 0 \tag{390}$$

A eq.(390) é uma condição necessária para que a construção de uma base natural possa ser realizada. Quando ela é satisfeita em todos os pontos, a base natural pode ser estendida, de um ponto qualquer, a todo o espaço. Um espaço com esta propriedade é dito de <u>curvatura zero</u>.

Embora os Γ^i_{jk} não sejam as componentes de um tensor, pode-se mostrar (veja abaixo) que a expressão no primeiro membro de (390) é um tensor. É costume denotá-lo assim:

$$R^m_{ilj} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^m_{kj} \tag{391}$$

É denominado o "tensor de curvatura", ou "tensor de Riemann". Temos então a seguinte condição: para que a base natural relativa às coordenadas

$u^1 \dots u^n$ possa ser estendida a todo o espaço, é necessário que

$$R^m_{ilj} = 0 \tag{392}$$

em todos os pontos. Note-se que, R^m_{ilj} sendo um tensor, a igualdade $R^m_{ilj} = 0$ será válida para quaisquer coordenadas, se for válida para um tipo. Logo, a propriedade descrita por (392) é intrínseca ao espaço.

Como é sabido, uma superfície esférica não pode ser coberta por um único sistema de coordenadas. Conclui-se que a superfície esférica não tem curvatura zero.

9.1 Coordenadas de Riemann

(ou, coordenadas localmente geodésicas).

O estudo de tensores a partir das propriedades de transformação de suas componentes é conceitualmente inferior ao estudo intrínseco, em que coordenadas não são utilizadas, e que foi uma das conquistas da matemática do século XX. Contudo, justifica-se por dois motivos:(1) é elementar, necessitando apenas de cálculo diferencial; (2) como é especializado em coordenadas, pode fazer uso, simplificando demonstrações e cálculos, de sistemas de coordenadas particulares, encurtando notavelmente os cálculos. Com as relações tensoriais não dependem de coordenadas, a demostração feita em um sistema particular, é geral. Dentre esses sistemas, o mais importante é o sistema de coordenadas de Riemann.

Teorema: existe, em cada ponto, um sistema de coordenadas com as seguintes propriedades:
(1)No ponto, origem das coordenadas, $\Gamma^i_{jk} = 0$ para todos os índices, e, como conseqüência, $\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = 0$, sendo x^j as tais coordenadas.
(2)Na origem g_{ik} tem os valores euclideanos, δ_{ik}, ou minkowskianos, η_{ik}, conforme o caso[9].
(3)Existe uma vizinhança da origem dentro da qual o transporte paralelo é tal que $d_{||}A^k = 0$.

[9]Na relatividade o correspondente ao espaço euclideano é o espaço-tempo de Minkowski, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k = (dx^o)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2$$

A demonstração é enjoada (Ver Synge,Schild, *Tensor Calculus*, pp.59-62).

9.1.1 Usos das coordenadas de Riemann

(1) Demonstrar (redemonstrar!) que $g_{ij;k}=0$.
Vamos ao sistema Riemanniano. Ali, temos que os Γ^i_{jk} são nulos. Logo,

$$g_{ij;k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Mas as derivadas de g_{ij} também são nulas, logo, em coordenadas riemannianas, $g_{ij;k}=0$. Mas $g_{ij;k}$ é um tensor. Logo, se é nulo em um sistema de coordenadas, é nulo em todos.

(2)Demonstrar que

$$\left(T^{rs}S_{rm}\right)_{;\,t}=\left(T^{rs}\right)_{;\,t}S_{rm}+T^{rs}S_{rm;\,t}$$

Considere o tensor

$$\left(T^{rs}S_{rm}\right)_{;\,t}-\left(T^{rs}\right)_{;\,t}S_{rm}-T^{rs}S_{rm;\,t}$$

No sistema de Riemann, a derivada covariante é coincide com a ordinária. Logo, o tensor acima é

$$\frac{\partial}{\partial x^t}\left(T^{rs}S_{rm}\right)-\frac{\partial}{\partial x^t}\left(T^{rs}\right)S_{rm}-T^{rs}\frac{\partial}{\partial x^t}\left(S_{rm}\right)$$

que, obviamente, é zero. Um tensor que é zero em um sistema de coordenadas é zero em todos. Logo,

$$\left(T^{rs}S_{rm}\right)_{;\,t}-\left(T^{rs}\right)_{;\,t}S_{rm}-T^{rs}S_{rm;\,t}=0$$

o que demonstra o "teorema".

(3) Demonstrar que, se A_r são as componentes covariantes de um campo vetorial qualquer, e R^l_{rst} são as componentes do tensor de curvatura,

$$A_{r\,;s\,;t}-A_{r\,;t\,;s}=R^l_{rst}A_l \tag{393}$$

(O primeiro membro seria zero se as derivadas covariantes mistas de segunda ordem independessem da ordem de derivação, como ocorre com as derivadas parciais. O segundo membro informa que a condição para que haja independência da ordem de derivação é que a curvatura seja zero. Em alguns

textos isto é apresentado como definição da curvatura).
Em coordenadas riemannianas, a relação (393) é

$$\frac{\partial}{\partial x^s}\left(A_{r\,;s}\right)-\frac{\partial}{\partial x^s}\left(A_{r\,;t}\right)=\left(\frac{\partial\Gamma^l_{rt}}{\partial x^s}-\frac{\partial\Gamma^l_{rs}}{\partial x^t}\right)A_l$$

onde usamos, no segundo membro, o fato de que os Γ^l_{rt}, *mas não as suas derivadas*, são nulos na origem das coordenadas riemannianas.Lembre-se de que

$$R^m_{ilj}=\frac{\partial\Gamma^m_{ij}}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma^m_{il}}{\partial u^j}+\Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^k_{il}\Gamma^m_{kj} \tag{394}$$

Ora,

$$\frac{\partial}{\partial x^t}\left(A_{r\,;s}\right)=\frac{\partial^2 A_r}{\partial x^t\partial x^s}-\frac{\partial\Gamma^m_{rs}}{\partial x^t}A_m$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x^s}\left(A_{r\,;t}\right)=\frac{\partial^2 A_r}{\partial x^s\partial x^t}-\frac{\partial\Gamma^m_{rt}}{\partial x^s}A_m$$

e a demonstração agora é trivial.

9.2 Geometria do transporte paralelo

O delta de Kronecker, δ^l_s pode ser considerado, para todos os valores possíveis dos índices, como o conjunto das componentes de um tensor de tipo (1,1). Podemos também considerar o campo tensorial que, em cada ponto, tem as componentes δ^l_s. O que faz deste campo algo ainda mais particular é que ele é definido independentemente do sistema de coordenadas: qualquer que seja este, o tensor tem as mesmas componentes.

Qual é a derivada covariante $\delta^l_{s\,;r}$? Aplicando a definição:

$$\delta^l_{s\,;r}=\frac{\partial\delta^l_s}{\partial x^r}+\Gamma^l_{mr}\delta^m_s-\Gamma^m_{sr}\delta^l_m \tag{395}$$

Isto dá, usando $\Gamma^l_{mr}\delta^m_s=\Gamma^l_{sr}$ e $\Gamma^m_{sr}\delta^l_m=\Gamma^l_{sr}$,

$$\delta^l_{s\,;r}=0+\Gamma^l_{sr}-\Gamma^l_{sr}=0 \tag{396}$$

Outra derivada covariante importante é a de g^{rm}. Temos

$$g^{lm}g_{ms} = \delta^l_s \tag{397}$$

$$\left(g^{lm}g_{ms}\right)_{;r} = g^{lm}_{;r}g_{ms}+g^{lm}g_{ms\,;r}=\delta^l_{s\,;r}=0 \tag{398}$$

$$= g^{lm}_{;r}g_{ms}=0 \tag{399}$$

Provamos que

$$g^{lm}_{;r} g_{ms} = 0 \tag{400}$$

Multiplicando à direita por g^{st} e somando sobre s, temos

$$0 = g^{lm}_{;r} g_{ms} g^{st} = g^{lm}_{;r} \delta^t_m = g^{lt}_{;r} \tag{401}$$

ou seja,

$$g^{lt}_{;r} = 0 \tag{402}$$

Vamos agora mostrar que o comprimento de um vetor não se altera por transporte paralelo. Seja V^i um vetor. Seu comprimento ao quadrado é $g_{ij}V^iV^j$.

$$d_{||}\left(g_{ij}V^iV^j\right) = d_{||}g_{ij}V^iV^j + g_{ij}d_{||}V^iV^j + g_{ij}V^id_{||}V^j \tag{403}$$

$$d_{||}g_{ij} = \left(\Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,jl}\right) du^l \tag{404}$$

$$\begin{aligned} d_{||}\left(g_{ij}V^iV^j\right) &= \left(\Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,jl}\right) du^l V^iV^j - 2\Gamma_{i,jl}V^iV^jdu^l \\ &= V^iV^jdu^l\left(\Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,lj} - 2\Gamma_{i,jl}\right) \\ &= V^iv^jdu^l\left(\Gamma_{j,il} - \Gamma_{i,lj}\right) = 0 \end{aligned} \tag{405}$$

Note que, na última linha, o segundo membro é zero porque é o produto contrído de um tensor simétrico (V^iV^j) por um antissimétrico $(\Gamma_{j,il} - \Gamma_{i,jl})$ pela troca dos índices i e j.

De forma análoga se mostra que

$$d_{||}\left(g_{ij}V^iW^j\right) = V^iW^jdu^l\left\{\Gamma_{j,il} + \Gamma_{i,lj} - \Gamma_{j,li} - \Gamma_{i,lj}\right\} = 0 \tag{406}$$

que mostra que o produto escalar de dois vetores é conservado pelo transporte paralelo.

Os dois resultados juntos levam ao seguinte: quando dois vetores são transportados paralelamente, o ângulo entre eles não se altera.

Teorema: *Ao se transportar paralelamente um vetor ao longo de uma geodésica, o ângulo que o vetor faz com a curva permanece constante.*
Dem: a geodésica tem a propriedade de que os vetores tangentes em todos os pontos são o transporte paralelo do vetor tangente à curva no ponto inicial. O ângulo que um vetor faz com a curva é o ângulo entre ele e o vetor tangente à curva. Mas o ângulo entre dois vetores não se altera por transporte paralelo...

9.3 Elementos de volume invariantes

Na relatividade restrita, no espaço-tempo de Minkowski, sabemos que

$$\int d^4x \equiv \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

é um invariante, no seguinte sentido: se um segundo referencial usa as coordenadas $x'^{\,i}$, temos

$$\int d^4x = \int d^4x'$$

Se forem usadas coordenadas curvilíneas (ou, no caso em que o espaço não é euclideano, quando não existem coordenadas cartesianas), como obter elementos de volume invariantes?

Sabemos, do cálculo, que a transformação correta é

$$d^4x = d^4x' det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\,j}}\right) \tag{407}$$

onde

$$det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\,j}}\right) \tag{408}$$

é o determinante jacobiano.

Vamos denotar a matriz jacobiana por J. Assim,

$$(J)_{ji} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\,j}} \tag{409}$$

Como o g_{ij} é um tensor, temos:

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^{\,j}}\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,k}} g_{lm} \tag{410}$$

ou, introduzindo as matrizes $\mathbb{G}$ e $\mathbb{G}'$, tais que $(\mathbb{G})_{ij} = g_{ij}$, e analogamente para $\mathbb{G}'$, e usando (409) e (410),

$$(\mathbb{G}) = J_{il}J_{km}(\mathbb{G})_{lm} \tag{411}$$

$$= J_{il}(\mathbb{G})_{lm}\left(J^t\right)_{mk} \tag{412}$$

$$= \left(J\mathbb{G}j^t\right)_{ik} \tag{413}$$

onde J^t é a transposta de J. Logo,

$$\mathbb{G}' = J\mathbb{G}J^t \tag{414}$$

Tomando o determinante termo a termo dessa relação matricial, temos

$$det\mathbb{G}' = detJ\ det\mathbb{G}\ detJ^t = (detJ)^2\ det\mathbb{G} \tag{415}$$

ou, usando notação já introduzida anteriormente,

$$g' = (detJ)^2\, g \tag{416}$$

ou, finalmente,

$$\sqrt{|g'|} = detJ\sqrt{|g|} \tag{417}$$

Voltando à eq.(407), temos

$$d^4x = d^4x'\frac{\sqrt{|g'}}{\sqrt{|g|}} \tag{418}$$

ou ainda

$$\sqrt{|g|}\ d^4x = \sqrt{|g'|}\ d^4x' \tag{419}$$

O produto $\sqrt{|g|}d^4x$ é dito *volume invariante*. O uso do valor absoluto de g é necessário porque, na relatividade, g é negativo.

O resultado vale para qualquer $n > 1$, ou seja,

$$\sqrt{|g|}\ d^nx = \sqrt{|g'|}\ d^nx' \tag{420}$$

Exemplos:
(1) Em coordenadas esféricas,

$$g_{rr} = 1\ \ g_{\theta\theta} = r^2\ \ g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$$

logo,

$$g = g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi} = r^4\sin^2\theta$$

e o elemento de volume invariante é

$$\sqrt{|g|}dr\ d\theta\ d\phi = r^2\sin\theta dr\ d\theta\ d\phi$$

que é o resultado conhecido.
(2)Coordenadas polares no plano:

$$g_{rr} = 1\ \ g_{\phi\phi} = r^2$$

O elemento de volume invariante é

$$\sqrt{|g|}dr\ d\phi = r\ dr\ d\phi$$

9.4 O tensor de Ricci e a curvatura escalar

Considere a seguinte contração do tensor de Riemann:

$$R_{ij} \equiv R^m{}_{imj} \tag{421}$$

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^k_{km} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{kj} \tag{422}$$

Este tensor é denominado *tensor de Ricci.* Contraíndo mais uma vez, temos

$$R = g^{ij}R_{ij} \tag{423}$$

que é a *curvatura escalar.* Como

$$\Gamma^i_{rl} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial u^l} \tag{424}$$

tem-se

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^m} - \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{i}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial u^i}\right) + \Gamma^k_{ij}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial u^k} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{kj} \tag{425}$$

Como

$$\Gamma^i_{il} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial u^l} \tag{426}$$

tem-se

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^m} - \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial u^i}\right) + \Gamma^k_{ij}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial u^k} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{kj} \tag{427}$$

Exercício: considere a superfície esférica de raio r. Calcule a curvatura escalar, usando as coordenadas θ, ϕ.
Solução: os Christoffels não-nulos são:

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\phi \quad ; \Gamma^2_{12} = \cot\theta \tag{428}$$

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{429}$$

$$g_{11} = r^2 \quad g_{22} = r^2\sin^2\theta \quad g = det\, g_{ij} = r^4\sin^2\theta \tag{430}$$

Um cálculo simples dá:

$$R_{11} = 1 \quad R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0 \tag{431}$$

A curvatura escalar é

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{11}R_{11} = \frac{1}{r^2}R_{11} = \frac{1}{r^2}$$

9.5 Curvatura e transporte paralelo

A fórmula do transporte paralelo,

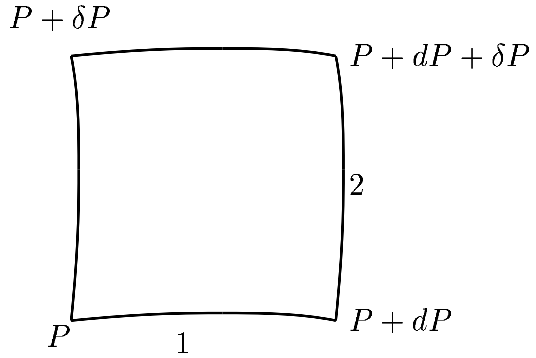
$$d_{||}V^k = -V^i \Gamma^k_{il} du^l \tag{432}$$

manifesta-se apenas sobre transportes paralelos *infinitesimais.* Para realizar um transporte paralelo *finito*, é preciso especificar uma curva e, então realizar o transporte paralelo ao longo da curva. Em outras palavras, o transporte paralelo de um vetor (ou de qualquer tensor) de um ponto P a um outro ponto Q qualquer, sem especificar um caminho, não está definido: pode dar mais de um resultado, dependendo do caminho seguido. Vamos ver agora que os espaços para os quais esse transporte paralelo independe do caminho, são exatamente os espaços de curvatura zero.

Dado um ponto P de coordenadas $(u^1, \ldots, u^n)$, considere o "quadrilátero" formado por ele e pelos pontos $P + dP$, de coordenadas $(u^1 + du^1, \ldots, u^n + du^n)$, $P + \delta P$, de coordenadas $(u^1 + \delta u^1, \ldots, u^n + \delta u^n)$ e $P + dP + \delta P$, de coordenadas $(u^1 + du^1 + \delta u^1, \ldots, u^n + du^n + \delta u^n)$.

Seja A^i um campo vetorial e $A^i(P)$ suas componentes em P. Vamos transportar[10] $A^i(P)$ até o ponto $P + dP$. Sejam $\dot{A}^i(P + dP)$ as componentes do campo transportado para $P + dP$.

$$\dot{A}^i = A^i + d_{||}A^i = A^i - \Gamma^i_{ls} A^l du^s \tag{433}$$



Transportemos agora $\dot{A}^i(P + dP)$ para o ponto $P + dP + \delta P$ ao longo do trecho 2 (ver figura). Obteremos $\ddot{A}^i(P + dP + \delta P)$. Temos:

$$\begin{aligned} & \ddot{A}^i(P + dP + \delta P) = \dot{A}^i(P + dP) + d_{||}\dot{A}^i(P + dP) \\ = \; & \left(A^i - \Gamma^i_{ls} A^l(u) du^s\right) - \Gamma^i_{mn}(u + du) \dot{A}^m(u + du) \delta u^n \end{aligned}$$

[10]Nesta seção, *transportar* significa *transportar paralelamente*

$$
\begin{aligned}
&= A^i - \Gamma^i_{ls} A^l du^s - \left[\Gamma^i_{mn}(u) + \frac{\partial \Gamma^i_{mn}}{\partial u^r} du^r\right] \times \\
&\times \; [A^m - \Gamma^m_{wv} A^w du^v]\, \delta u^n \\
&= A^i - \Gamma^i_{ls} A^l du^s - \Gamma^i_{mn} A^m \delta u^n - \frac{\partial \Gamma^i_{mn}}{\partial u^r} A^m \, du^r \, \delta u^n \\
&+ \; \Gamma^i_{mn} \Gamma^m_{wv} A^w du^v \delta u^n + o(d^3) \\
&= A^i - \Gamma^i_{ls} A^l du^s - \Gamma^i_{mn} A^m \delta u^n - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{wn}}{\partial x^v} - \Gamma^i_{mn} \Gamma^m_{wv}\right) A^w du^v \delta u^n \quad (434)
\end{aligned}
$$

Seguindo o caminho alternativo até $P = dP + \delta P$, isto é, transportando primeiro de $P \rightarrow P + dP$ e depois até $P + dP + \delta P$, temos (basta inverter os papéis de d e δ):

$$
A^i - \Gamma^i_{ls} A^l \delta u^s - \Gamma^i_{mn} A^m du^n - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{wv}}{\partial u^n} - \Gamma^i_{mv} \Gamma^m_{wv}\right) A^w du^v \delta u^n \qquad (435)
$$

Subtraíndo (435) de (434), tem-se:

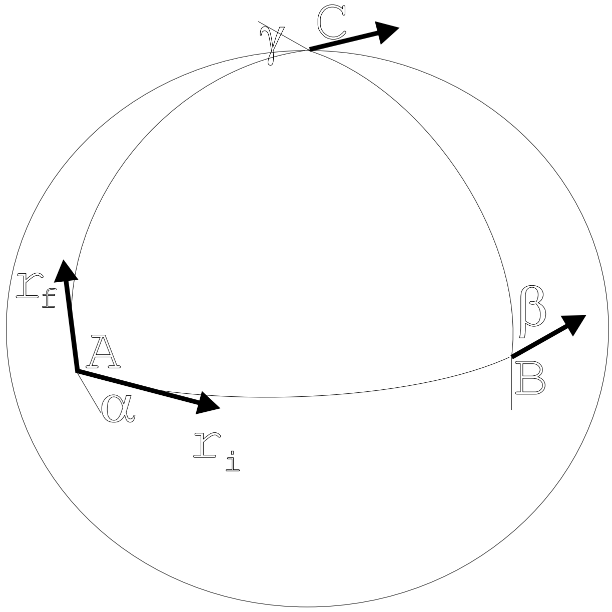
$$
\Delta A^i = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{wv}}{\partial u^n} - \Gamma^i_{mv} \Gamma^m_{wn} - \frac{\partial \Gamma^i_{wn}}{\partial u^v} - \frac{\partial \Gamma^i_{wn}}{\partial u^v} + \Gamma^i_{mn} \Gamma^m_{wv}\right) A^w du^v \delta u^n \qquad (436)
$$

ou,

$$
\Delta A^i = R^i{}_{wnv} A^w du^v \delta u^n \qquad (437)
$$

Como ΔA^i é um vetor, pois é a diferença de dois vetores no mesmo ponto, e A^w, du^v e δu^n também são vetores, e arbitrários, segue que $R^i{}_{wnv}$ é um tensor.

A eq.(437) é o resultado que se presta mais facilmente a entender o conceito de curvatura. Essencialmente, ele diz que, se um espaço é tal que, no transporte paralelo de um vetor ao longo de um circuito fechado qualquer, o vetor que volta ao ponto de partida coincide com o vetor inicial, a curvatura é zero. Usando um contorno formado por geodésicas, a operação de transporte paralelo é facil de visualizar, pois o vetor fará sempre o mesmo ângulo com a geodésica. No plano, tomando-se como circuito um quadrado, portanto um circuito com 4 geodésicas, é facil ver que qualquer vetor volta sobre si mesmo, terminado o transporte, o que mostra que o plano tem curvatura zero. Mais surpreendente é o cilindro. onde, procedendo da mesma forma, também se obtém curvatura zero. Na verdade este resultado não é surpreendente, porque o cilindro é só "um plano enrolado". O caso da esfera (superfície esférica de dimensão 2, é mais interessante. As geodésicas são os círculos máximos. Portanto, segmentos de meridianos são geodésicas, assim como segmentos do equador.



Considere um triângulo sobre a esfera cujos lados são arcos de círculos máximos (veja a figura). O vetor $\vec{r}$ parte do ponto A e é transportado paralelamente até B. Era tangente à curva AB e assim permanece. Forma, portanto, com a curva BC, o mesmo ângulo que a curva AB forma com ela em B, isto é β. Move-se, por transporte paralelo, ao longo da curva BC conservando o ângulo que fazia com ela em B. Chegado a C, forma com a curva AC o ângulo $\beta + \gamma$, pois forma com BC o ângulo β e esta forma com AC o ângulo γ. O vetor continua então a deslocar-se paralelamente ao longo de AC, sempre mantendo com ela o ângulo $\beta + \gamma$. Chega finalmente ao ponto A, onde forma com a curva AB o ângulo $\alpha + \beta + \gamma$, já que a curva AC forma com AB o ângulo α. Para outras orientações, o ângulo total pode ser $\alpha + \beta + \gamma - 2\pi$. Assim, o vetor no ponto final difere do vetor no ponto inicial, em direção, por um ângulo que pode ser $\alpha+\beta+\gamma$ ou $\alpha+\beta+\gamma-2\pi$. Note que num triângulo plano temos $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, de modo que os vetores coincidem. A área de um triângulo geodésico de ângulos externos (α, β, γ) sobre uma esfera de raio a é dada por $\{2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)\}a^2$ (veja [6]). Assim, dividindo o ângulo necessário para girar o vetor final de modo a fazê-lo coincidir com o vetor inicial, pela área do triângulo, obtém-se

$$\left| \frac{\text{Ângulo}}{\text{Área}} \right| = \frac{1}{a^2} \tag{438}$$

que é a curvatura da esfera. Vê-se assim que a diferença entre os vetores inicial e final de um transporte paralelo ao longo de um circuito fechado é uma medida da curvatura. Este é um resultado de Gauss. Por isso, constatamos que a curvatura definida acima generaliza a noção de *curvatura total* de Gauss para objetos de dimensões maiores do que 2.

9.6 Simetrias do tensor de curvatura

O tensor de curvatura $R^i{}_{jkl}$ é de tipo $(1,3)$, portanto, de ordem 4. Tem uma barbaridade de componentes: 4^n, se fossem todas independentes, n sendo a dimensão do espaço. No espaço-tempo da relatividade, seriam 256 componentes! Em duas dimensões, como no caso da teoria das superfícies de Gauss, seriam 16 componentes. No entanto, sabemos que a curvatura de uma superfície bidimensional é determinada por um único número! Esta redução drástica é devida ao grande número de simetrias que o tensor de curvatura possui. Para estudá-las, é conveniente usar coordenadas riemannianas, ou localmente geodésicas. Nelas, como vimos, os Γ^i_{jk} são nulos na origem, e, equivalentemente, são nulos na origem as derivadas parciais do tensor métrico. Além disso, os eixos podem ser escolhidos de tal maneira que g_{ij} tenha, na origem, os valores euclideanos, ou minkowskianos, conforme o caso.

No sistema localmente geodésico, então,

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} \tag{439}$$

Vamos utilizar as componentes covariantes deste tensor:

$$R_{jklm} = g_{ij} R^i{}_{klm} \tag{440}$$

Então, em coordenadas localmente geodésicas,

$$R_{jklm} = g_{ij}\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - g_{ij}\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(g_{ij}\Gamma^i_{km}\right) - \frac{\partial}{\partial x^m}\left(g_{ij}\Gamma^i_{kl}\right) \tag{441}$$

onde foi usado o fato de que as derivadas parciais de g_{ij} são nulas na origem deste sistema de coordenadas. Então,

$$R_{jklm} = \frac{\partial \Gamma_{j,km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{j,kl}}{\partial x^m} \; . \tag{442}$$

É imediato verificar que

$$R_{jklm} = -R_{jkml} = R_{kjml} = -R_{kjlm} \tag{443}$$

e que

$$R_{jklm} + R_{jmkl} + R_{jlmk} = 0 \tag{444}$$

Usando estas relações de simetria, o número de componentes independentes diminui notavelmente.

Exercícios:
(1) Seja $n = 2$ (n é a dimensão do espaço). Mostre, utilizando as simetrias descritas acima, que R_{ijkl} tem uma única componente invariante, que pode ser tomada como R_{1212}. Isto explica por que a curvatura de uma superfície é um número.
(2) Calcule, neste mesmo caso, a curvatura escalar.
(3) Determine o número de componentes independentes de R_{ijkl} no espaço-tempo da relatividade geral ($n = 4$).

9.7 Identidades de Bianchi

As identidades de Bianchi são as relações

$$R^i{}_{klm;n} + R^i{}_{knl;m} + R^i{}_{kmn;l} = 0 \tag{445}$$

A demonstração é simples, se usarmos o sistema localmente geodésico, pois, neste sistema, elas são escritas

$$\frac{\partial R^i{}_{klm}}{\partial x^n} + \frac{\partial R^i{}_{knl}}{\partial x^m} + \frac{\partial R^i{}_{kmn}}{\partial x^l} = 0 \tag{446}$$

Usando o fato de que, neste sistema, vale (439), tem-se facilmente o resultado. Note que ele depende, fundamentalmente, da comutatividade das derivadas parciais mistas.

Exercícios:
(1) Prove as identidades de Bianchi, nas linhas descritas acima.
(2) Demonstre a *segunda identidade de Bianchi*,

$$\left(R^m_n - \frac{1}{2}\delta^m_n\, R\right)_{;m} = 0 \tag{447}$$

10 Tensores: tratamento intrínseco

Uma exposição moderna de tensores evita definí-los a partir de suas propriedades de transformação. Não há nada de errado com a abordagem histórica, que é esta que os define em termos de suas propriedades de transformação: afinal foi como os tensores foram descobertos, e como suas principais aplicações, por exemplo, a Relatividade Geral, foram formuladas. No entanto, o uso de componentes para definir tensores não é natural, assim como não é natural desenvolver o cálculo vetorial em termos de componentes em relação a uma base.

Neste capítulo apresentamos a álgebra tensorial de forma intrínseca, isto é, sem mencionar, na definição dos tensores, qualquer base. O tratamento é baseado em [3], que indicamos ao leitor para maiores detalhes.

Sejam V_1, V_2 e W espaços vetoriais sobre o corpo dos reais. Uma aplicação $f : V_1 \times V_2 \to W$ é <u>bilinear</u> se ela for linear em cada variável:

$$f(av_1 + \overline{a}\,\overline{v}_1, v_2) = af(v_1, v_2) + \overline{a}f(\overline{v}_1, v_2) \quad (448)$$

$$f(v_1, av_2 + \overline{a}\,\overline{v}_2) = af(v_1, v_2) + \overline{a}f(v_1, \overline{v}_2) \quad (449)$$

onde os v_i, etc., são vetores, e a, etc., são números reais.

Analogamente, $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ é <u>r-linear</u> se for linear em cada uma das r variaáveis.

O conjunto das funções bilineares de $V_1 \times V_2 \to W$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial (a adição é a adição usual de funções bilineares, que é uma função bilinear; a multiplicação por um escalar é também a usual). Este espaço vetorial é denotado $L(V_1, V_2; W)$. Para funções r-lineares, denotamos o espaço vetorial por $L(V_1, \ldots, V_r; W)$.

Sejam V e W dois espaços vetoriais, e sejam $\tau \in V^*$ e $\theta \in W^*$ elementos de seus duais.[11] Então τ é uma função linear $\tau : V \to \mathbb{R}$, e $\theta : W \to \mathbb{R}$. A partir delas pode-se construir uma função

$$\tau \otimes \theta : V \times W \to \mathbb{R} \,,$$

bilinear, pela fórmula

$$\tau \otimes \theta(v, w) = \langle v, \tau \rangle \langle w, \theta \rangle$$

denominada <u>produto tensorial</u> de τ por θ. Portanto, $\tau \otimes \theta \in L(V \times W; \mathbb{R})$.

Exercício: Prove que os produtos tensoriais $\tau \otimes \theta \in L(V, W; \mathbb{R})$, onde $\tau \in V^*$ e $\theta \in W^*$, geram $L(V, W; \mathbb{R})$.

[11] Se E é um espaço vetorial, denotamos por E^* o seu espaço dual.

Solução: Sejam $\{\epsilon^i\}$ e $\{\overline{\epsilon}^l\}$ bases de V^* e W^* respectivamente, duais às bases $\{e_i\}$ e $\{\overline{e}_l\}$. Considere os produtos tensoriais $\epsilon^i \otimes \overline{\epsilon}^l$ para todos os i e l. Seja $M \in L(V, W; \mathbb{R})$.Como

$$(\epsilon^i \otimes \overline{\epsilon}^l)(v, w) = (\epsilon^i \otimes \overline{\epsilon}^l)(v^m e_m, w^\theta \overline{e}_\theta) = v^m w^\theta \delta^i_m \delta^l_\theta = v^i w^l \ ,$$

$$M(v, w) = M(v^i e_i, W^l \overline{e}_l) = v^i w^l M(e_i, \overline{e}_l) = M_{il} v^i w^l = M_{il}(\epsilon^i \otimes \overline{\epsilon}^l)(v, w)$$

Logo,

$$M = M_{il}(\epsilon^i \otimes \overline{\epsilon}^l)$$

Este exercício ensina que existem bases de $L(V, W; \mathbb{R})$ formadas por produtos tensoriais de funções lineares. Por outro lado, nem todo elemento de $L(V, W; \mathbb{R})$ é da forma $\tau \otimes \theta$.

10.1 Espaços tensoriais

Seja V um espaço vetorial. As funções multilineares com valores reais e com variáveis em V ou V^* são chamadas tensores sobre V. Conforme o número de variáveis em V^* e V, os tensores são classificados em tipos. Por exemplo, uma função multilinear

$$f : V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots V \to \mathbb{R}$$

com r fatores V^* e s fatores V é um tensor de tipo (r, s). Classicamente este tensor é dito *r vezes contravariante e s vezes covariante*. Assim,

$$f : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$$

tem o tipo $(1, 2)$.

Definição: o espaço das funções multilineares sobre $V^* \times V \times V$ é denotado por $V \otimes V^* \otimes V^* = T^1_2(V)$. Um tensor de tipo $(0, 0)$ é, por definição, um escalar. Por isso, $T^0_0 = \mathbb{R}$. Um tensor de tipo $(1, 0)$ é chamado vetor contravariante, um de tipo $(0, 1)$, é um vetor covariante.

Nota: observe que as funções multilineares

$$f : \underbrace{V^* \times \ldots V^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$$

com r fatores V^* e s fatores V formam o espaço vetorial (ou tensorial)

$$\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r \text{ vezes}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s \text{ vezes}}$$

10.2 Álgebra de tensores

As operações de adição e multiplicação por um escalar, típicas da estrutura de espaço vetorial, não esgotam as operações que se pode definir para tensores. Existe ainda o produto tensorial de tensores, podendo os fatores ser tensores de tipos diferentes. O produto tensorial do tensor A, de tipo (r, s), pelo tensor B, de tipo (t, u), é um tensor, denotado por $A \otimes B$, de tipo $(r+t, s+u)$, definido como função multilinear de

$$(V^*)^{r+t} \times V^{s+u} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$A \otimes B(\tau^1, \ldots, \tau^{r+t}, v_1, \ldots, v_{s+u}) = A(\tau^1, \ldots, \tau^r, v_1, \ldots, v_s) B(\tau^{r+1}, \ldots, \tau^{r+t}, v_{s+1}, \ldots, v_{s+u}) \quad (450)$$

A partir desta definição mostra-se sem dificuldade que

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C) && (451) \\ A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C && (452) \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C && (453) \end{aligned}$$

Em geral, $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Exercício: se $v, w \in V^*$ são linearmente independentes, mostre que $v \otimes w \neq w \otimes v$. Sugestão: seja $\{\epsilon^i\}$ uma base de V^*. Então ϵ^i e ϵ^j são linearmente independentes, para $i \neq j$. Ora,

$$\begin{aligned} \left(\epsilon^i \otimes \epsilon^j\right)(v, w) &= \langle v, \epsilon^i \rangle \langle w, \epsilon^j \rangle \\ &= \langle v^l e_l, \epsilon^i \rangle \langle w^m e_m, \epsilon^j \rangle \\ &= v^l \langle e_l, \epsilon^i \rangle w^m \langle e_m, \epsilon^j \rangle \\ &= v^l \delta_l^i w^m \delta_m^j \\ &= v^i w^j \end{aligned}$$

ao passo que

$$(\epsilon^j \otimes \epsilon^i)(v, w) = v^j w^i \quad (454)$$

Teorema 1 *Os espaços vetoriais* $V \otimes V^*$, $L(V, V)$ *e* $L(V^*, V^*)$ *são naturalmente isomórficos.*

(Ver Seção 2.12 de [**?**]).

Teorema 2 *Um tensor é determinado pelos seus valores em uma base e na base dual desta. Esses valores são as componentes do tensor em relação aos produtos tensoriais dos elementos da base pelos elementos da base dual, e esses produtos formam bases dos espaços tensoriais.*

Dem.: Sejam $A \in T_s^r$ e

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A\left(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}\right)$$

Então, para quaisquer $\tau^1, \dots, \tau^r \in V^*$ e $v_1, \dots, v_s \in V$,

$$\tau^p = a^p{}_i \epsilon^i \quad , \quad v_q = b^i{}_q e_i$$

$$\begin{aligned} A\left(\tau^1, \dots, \tau^r, v_1, \dots, v_s\right) &= a^1{}_{i_1} \dots a^r{}_{i_r} b_1{}^{j_1} \dots b_s{}^{j_s} A\left(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}\right) \\ &= a^1{}_{i_1} \dots a^r{}_{i_r} b_1{}^{j_1} \dots b_s{}^{j_s} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \\ &= A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left(e_{1_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_s}\right)\left(\tau^1, \dots, \tau^r, v_1, \dots, v_s\right) \end{aligned}$$

ou

$$A = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} e_{1_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_s}$$

Aqui usamos

$$\langle e_{i_1}, \tau^1 \rangle = \langle e_{i_1}, a^1_i \epsilon^i \rangle = a^1_i \langle e_{i_1}, \epsilon^i \rangle = a^1_i \delta^i_{i_1} = a^1_{i_1} \quad ,\text{etc}$$

Resta verificar que os $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_s}$ são linearmente independentes, que deixamos como exercício.

Corolário 1 *A dimensão de T_s^r é d^{r+s}, sendo d a dimensão de V e V^*.*

Exemplo: seja V de dimensão 2, e considere $T_1^2 = V \otimes V \otimes V^*$. Uma base de V é $\{e_i\}$. Sua base dual seja $\{\epsilon^i\}$. Então, uma base de T_1^2 é formada pelos produtos tensoriais

$$\begin{array}{ccc} e_1 \otimes e_1 \otimes \epsilon^1 & , & e_1 \otimes e_1 \otimes \epsilon^2 \, , \\ e_1 \otimes e_2 \otimes \epsilon^1 & , & e_1 \otimes e_2 \otimes \epsilon^2 \, , \\ e_2 \otimes e_1 \otimes \epsilon^1 & , & e_2 \otimes e_1 \otimes \epsilon^2 \, , \\ e_2 \otimes e_2 \otimes \epsilon^1 & , & e_2 \otimes e_2 \otimes \epsilon^2 \end{array}$$

Problema: Mostrar que as componentes de um produto tensorial são os produtos das componentes dos fatores, ou seja,

$$(A \otimes B)^{i_1 \dots i_{r+t}}_{j_1 \dots j_{s+u}} = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \, B^{i_{r+1} \dots i_{r+t}}_{j_{s+1} \dots j_{s+u}}$$

10.3 Leis de transformação

Como se relacionam as componentes de um tensor quando se usam duas bases diferentes? Sejam $\{e_i\}$, $\{\epsilon^i\}$ uma base de V e sua dual. Consideremos, para ficar em terreno concreto, um tensor de tipo $(1,2)$, denotado por A. Então as componentes de A em relação ao par de bases $\{e_i\}$ e $\{\epsilon^i\}$ são

$$^{(e)}A^i{}_{jk} = A\left(\epsilon^i, e_j, e_k\right) \tag{455}$$

Sejam $\{f_i\}$, $\{\phi^i\}$ outra base de V, e sua dual, e sejam

$$\begin{aligned} f_i &= a_i^j e_j && (456)\\ \phi^i &= b_j^i \epsilon^j && (457) \end{aligned}$$

as expansões dos elementos das novas bases em elementos das velhas. Denotando de forma análoga as novas componentes, temos

$$\begin{aligned} ^{(f)}A^i{}_{jk} &= A\left(\phi^i, f_j, f_k\right) \\ &= A\left(b_m^i e^m, a_j^n e_n, a_k^p e_p\right) \\ &= b_m^i a_j^n a_k^p A\left(\epsilon^m, e_n, e_p\right) \\ &= b_m^i a_j^n a_k^p \; {}^{(e)}A^m{}_{np} \\ ^{(f)}A^i{}_{jk} &= b_m^i a_j^n a_k^p \; {}^{(e)}A^m{}_{np} && (458) \end{aligned}$$

que é a lei de transformação clássica das componentes do tensor A, de tipo $(1,2)$.

Para a aqueles já familiarizados com as noções de espaço tangente e cartas locais, se V é o espaço tangente em um ponto m de uma variedade M, ou seja, $V = M_m$, e se as bases são aquelas obtidas de cartas $\left(x^i\right)$ e $\left(y^i\right)$ em m,

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \epsilon^i = dx^i && (459)\\ f_i &= \frac{\partial}{\partial y^i} \quad , \quad \phi^i = dy^i && (460)\\ a_i^j &= \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \quad , \quad b_j^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} && (461) \end{aligned}$$

obtendo-se

$$^{(y)}A^i{}_{jk} = \frac{\partial y^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial y^j}\frac{\partial x^p}{\partial y^k} \; {}^{(x)}A^m{}_{np} \tag{462}$$

que é a fórmula de transformação que usamos, no início destas notas, para definir um tensor.

Referências

[1] Synge, Schild, *Tensor Calculus*

[2] H. Weyl, *Space, Time, Matter*

[3] Bishop, Goldberg, *Tensor Calculus on Manifolds*

[4] Darling, *Differential Forms and Connections*

[5] H. Fleming, *Two Theorems by Helmholtz*, Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol.23, N.2,155(2001)

[6] H.S.M Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, 1969.