A magia da equação de Laplace

Henrique Fleming

21-8-01

Na eletrostática temos as equações básicas

$$rot\vec{E} = 0 \tag{1}$$

(que significa que a força eletrostática é conservativa) e, nas regiões onde não há cargas,

$$div\vec{E} = 0 \; . \tag{2}$$

A primeira dessas equações é equivalente a

$$\vec{E} = -grad \; \phi \; , \tag{3}$$

onde ϕ é o potencial escalar. Usando 3 em 2, temos

$$div \; grad \; \phi = 0 \tag{4}$$

ou

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \tag{5}$$

onde $\vec{\nabla}^2$ é o operador Laplaceano. A equação 5 é a famosa equação de Laplace. Boa parte de sua fama é devida a um poderoso teorema de existência e unicidade que é o tema principal dessas notas. Para demonstrar esse teorema precisamos do teorema do divergente.

Numa região onde há cargas, não vale a equação de Laplace, que é substituída pela equação de Poisson,

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho \tag{6}$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga. Por outro lado, generalizando a lei de Coulomb, vimos que

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r'} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \; , \tag{7}$$

e que, portanto, a Eq.(7) exibe uma solução da Eq.(6). De fato, (7) é a solução de (6) que se anula no infinito. Mais tarde vamos estudar o método inventado por George Green para obter este resultado trabalhando diretamente com a equação de Poisson.

1 Teorema do divergente

Seja $\vec{W}$ um campo vetorial "bem comportado", S uma superfície fechada, e V o volume interno a esta superfície. Então,

$$\int dV div\,\vec{W} = \int_S \vec{W}.\vec{n}dS \tag{8}$$

onde $\vec{n}$ é a normal externa à superfície. Não vamos demonstrar este teorema, mas usá-lo para demonstrar outros. Trata-se de um teorema clássico da Análise. Uma demonstração moderna, usando a teoria das formas diferenciais exteriores encontra-se em [1], [2] ou [3]. Na aula apresentamos uma "demonstração" para o caso de um cubo, que serve para entender a idéia central, num caso simples. Para a demonstração clássica, o leitor não pode perder a oportunidade de consultar um dos grandes livros de todos os tempos, o *Treatise on Electricity and Magnetism*, de James Clerk Maxwell, ainda publicado pela Dover. Narrando uma das maiores descobertas de todos os tempos, a natureza eletromagnética da luz, esse livro, extraordinariamente bem escrito, mantém ainda uma grande vivacidade e supera de muito todos os epígonos modernos [4].

Na verdade, o teorema do divergente vale em situações mais gerais: considere uma esfera da qual se subtrai o volume de uma esfera concêntrica e menor. Seja V o volume externo à esfera pequena e interno à grande; seja Σ a superfície composta pela superfície da esfera interna orientada pela normal *interna*, denominada Σ_1, e pela superfície da esfera grande, orientada pela normal externa, denominada Σ_2. Então, vale a seguinte versão do teorema do divergente:

$$\int_V d^3\vec{r} div\vec{V} = \int_{\Sigma_1} \vec{V}.\vec{n}dS + \int_{\Sigma_2} \vec{V}.\vec{n}dS. \tag{9}$$

É claro que as superfícies externa e interna não precisam ser esféricas, e que o número de superfícies componentes não se restringe a dois, podendo ser qualquer.

2 Fórmulas de Green

Seja u uma função tal que

$$\vec{\nabla}^2 u = 0 \ , \tag{10}$$

ou seja, u é solução da equação de Laplace. Diz-se então que u é *harmônica.* Sejam u e v duas funções definidas em uma região R, e seja Σ a superfície (eventualmente composta de várias partes conexas) que delimita essa região. Apliquemos o teorema do divergente à função $u\vec{\nabla}v$. Temos, preliminarmente, que

$$div(u\vec{\nabla}v) = u\vec{\nabla}^2 v + \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v \tag{11}$$

Logo,

$$\int div(u\vec{\nabla}v)dV = \int u\vec{\nabla}^2 v dV + \int \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v dV = \int_\Sigma u\vec{\nabla}v.\vec{n}dS \tag{12}$$

onde a igualdade entre a primeira e a última integrais constitui o teorema do divergente. Rearranjando, temos

$$\int dV\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v = -\int dV u\vec{\nabla}^2 v + \int_\Sigma u\vec{\nabla}v.\vec{n}dS \quad (13)$$

Esta equação é denominada *primeira fórmula de Green.* Considere agora a função $u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u$, e apliquemos a ela o teorema do divergente. Temos

$$\int dV div(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) = \int dv(u\vec{\nabla}^2 v - v\vec{\nabla}^2 u) = \int dS(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u).\vec{n} \quad (14)$$

Logo,

$$\int dv(u\vec{\nabla}^2 v - v\vec{\nabla}^2 u) = \int dS(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u).\vec{n} \quad (15)$$

Esta igualdade é denominada *segunda fórmula de Green.*

George Green foi um físico-matemático de primeira grandeza, embora tenha sido sempre um amador, e nunca tenha tido qualquer diploma universitário. Seu pai era dono de um moinho, trabalhava duro e achava que esse negócio de física- matemática era coisa de ... Deixa prá lá! Estudando por conta própria Green descobriu praticamente todos os métodos matemáticos da teoria de campos, entre os quais a função de Green e os potenciais ϕ e $\vec{A}$. Publicou, em pequena tiragem, por conta própria, suas descobertas em um tratado, que se tornou obra ambicionadíssima e rara, naqueles tempos sem xerox. Quando o jovem William Thomson, depois Lord Kelvin, visitou Paris, havia uma fila de físicos e matemáticos eminentes querendo ter uma entrevista com aquele jovem quase desconhecido. O que eles queriam era tomar emprestado o tratado de Green, do qual Kelvin era o feliz possuidor de uma cópia.

3 Teorema de unicidade

O grande poder da equação de Laplace está no fato de que, em certas condições, pode-se garantir a existência e a unicidade da solução. Assim, qualquer que seja o método pelo qual a solução é obtida, a solução é aquela, e nenhuma outra. Vamos demonstrar aqui a unicidade. O teorema de existência é difícil, e sua demonstração ajuda pouco na compreensão do problema. Suponhamos que u seja harmônica no volume V, e tomemos $v = u$. Usando a Eq.(13) temos então

$$\int dV\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}u = -\int dV u\vec{\nabla}^2 u + \int_S u\vec{\nabla}u.\vec{n}dS \quad (16)$$

Logo,

$$\int dV|\vec{\nabla}u|^2 = \int u\vec{\nabla}u.\vec{n}dS \quad (17)$$

Uma conseqüência dessa fórmula é a seguinte: seja u harmônica em V e nula em S, que é a superfície que delimita V. Então u é nula em V. De fato, $\int dV|\vec{\nabla}u|^2 = 0$ implica em $\vec{\nabla}u = 0$ em V, e, portanto, $u = constante$ em V. Como u é contínua, esta constante tem de ser zero, pois $u = 0$ na superfície.

Sejam agora f e g duas funções harmônicas em V e tais que $f = g$ na superfície que delimita este volume. Então, $f = g$ em todo o volume. De fato, basta aplicar o teorema anterior para a função $f - g$.

Chegamos assim ao enunciado do grande teorema de unicidade: se f é uma solução da equação de Laplace que tem valores determinados sobre uma superfície fechada, f é única. Um exemplo de aplicação deste teorema com relevância para a física é o seguinte: determinar uma função que satisfaça a equação de Laplace no interior de uma superfície fechada e que seja constante, igual a C, nessa superfície. Seja f a função constante cujo valor é C. Ela é solução da equação de Laplace, e seu valor sobre a superfície fechada é C. Logo, pelo teorema de unicidade, esta função é a única função que satisfaz a equação de Laplace e vale C na superfície considerada. Na física, o potencial eletrostático, em uma região onde não há cargas, é harmônico (satisfaz a equação de Laplace). Por outro lado, sabe-se que, no equilíbrio, o potencial sobre a superfície de um condutor é constante. Logo, como, dentro de um condutor, a carga é zero, temos que o potencial é constante, com aquele valor que ele assume na superfície. Segue como conseqüência que o campo elétrico é zero, no interior do condutor.

4 Máximos e mínimos

Funções harmônicas, e, em particular, potenciais em regiões onde não há cargas, não podem ter máximos nem mínimos. A demonstração deste importante resultado é usualmente feita utilizando a segunda fórmula de Green. Seja Σ uma superfície esférica com centro em $r = 0$, e V o volume delimitado por ela. Seja u uma função harmônica, e seja $v = \frac{1}{r}$, que é uma função harmônica exceto para $r = 0$. A segunda fórmula de Green aplicada a essas funções u e v dá:

$$\int dV \left(u\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} \right) = \int_S \left(u\vec{\nabla}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\vec{\nabla}u \right) .\vec{n} \tag{18}$$

Mas, na superfície esférica, onde a segunda integral é calculada, $r = R$, onde R, constante, é o raio da esfera. Logo,

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{R^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{R^2}\vec{n} \tag{19}$$

e, então,

$$\int dV \left(u\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{R^2}\int dSu\vec{n}.\vec{n} = -\frac{1}{R^2}\int dSu \tag{20}$$

Mas (veja Apêndice),

$$\int dVu\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi u(0) \tag{21}$$

logo,

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int udS \tag{22}$$

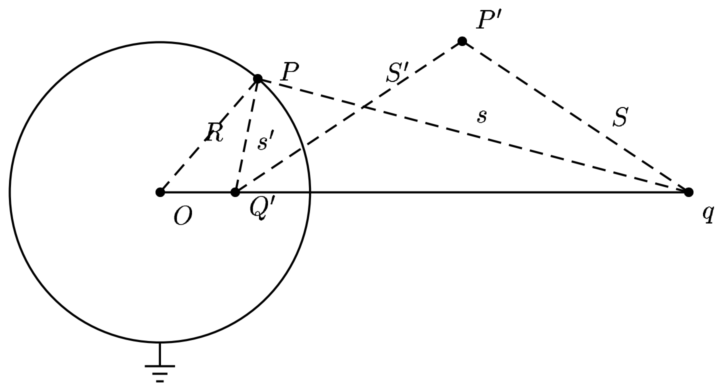
que está nos dizendo o seguinte: uma função harmônica tem, em qualquer ponto, como valor, a média dos valores que tem em uma superfície esférica qualquer centrada neste ponto (desde que contida na região em que a função é harmônica). Uma aplicação imediate é a seguinte: dada uma distribuição de cargas em repouso, não há pontos em que uma carga-teste permaneça em equilíbrio, a não ser aqueles pontos onde já existam cargas (e, por conseguinte, onde a equação de Laplace não seja satisfeita).

5 Aplicações

Como aplicações desses poderosos teoremas, vamos resolver completamente o seguinte problema: uma carga puntifome de valor q é posta a uma distância d do centro de uma esfera condutora de raio R. A carga é externa à esfera, ou seja, $d > R$. Determinar o campo elétrico resultante. Primeiramente, vamos supor que a esfera esteja ligada à terra, que é uma linguagem técnica para dizer que o potencial na esfera é mantido igual a zero. Este problema não é do tipo que pode ser resolvido pelo uso da solução da equação de Poisson dada por

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r'}\, \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{23}$$

porque não conhecemos a distribuição de cargas que aparecem no condutor por causa da presença da carga q externa. Por outro lado, sabemos que, fora do condutor, só existe a carga q, e que, portanto, fora do condutor (e excluído o ponto onde está a carga q), a equção de Laplace é satisfeita. A figura abaixo descreve a situação.



A primeira aplicação do teorema de unicidade da equação de Laplace a este caso é muito simples: determinar o potencial em todos os pontos no interior da esfera condutora. Como o condutor está em equilíbrio, sabemos que sua superfície é uma equipotencial; além disso, como está ligado à terra, o valor desse potencial constante é zero, pelo menos na superfície. Considere a região interna ao condutor, limitada, isto é, pela superfície (fechada) do mesmo. Para esta região só existe uma solução com valor zero na superfície, pelo teorema da unicidade. Ora, a função que tem valor zero em todos os pontos do interior satisfaz obviamente, aí, a equação de Laplace, e tem o valor zero na superfície. Então, resolve o problema, e é a única solução.

Pode-se usar este método também para a região externa à esfera, com algum cuidado. Primeiro, consideremos a superfície complexa (isto é, composta de várias partes) formada por: a superfície esférica da figura; uma pequeniníssima superfície esférica em torno da carga q; uma outra superfície esférica, concêntrica com a primeira, e de raio muitíssimo grande. Orientemos as três superfícies assim: a esfera condutora, com a normal interna; a pequena esfera, com a normal interna; a enorme esfera, com a normal externa. Juntas e orientadas assim, elas são a "superfície externa" do volume externo ao condutor e à esferinha, e interno à esferona. Neste volume não há cargas, logo, o potencial satisfaz a equação de Laplace. Além disso, temos as seguintes condições sobre os "contornos" (que são as superfícies citadas): sobre o condutor, $\phi = 0$; sobre a esferinha de raio ϵ, $\phi = \frac{q}{\epsilon}$, sobre a esferona, $\phi = 0$ (ela é muuuito grande!). Posteriormente fazemos o raio da esfera grande tender ao infinito. Então podemos usar o teorema da unicidade para essar região. Se acharmos uma função que satisfaça a esuqção de Laplace na região e tenha os valores estipulados nas siperfícies, essa será a solução única.

William Thomson, Lord Kelvin[1] teve uma de suas idéias geniais: percebeu que poderia obter um potencial com as propriedades acima trabalhando com uma distribuição de cargas muito simples: simplesmente adicionando, à carga q, uma carga q', de valor a ser determinado, na posição Q' (veja a figura). O que esta posição tem de especial é que o ponto Q' é escolhido de tal forma que o triângulo qPO seja semelhante ao triângulo $PQ'O$. Vamos mostrar que o potencial criado só por essas duas cargas tem as propriedades desejadas (no exterior da esfera condutora). De fato, sendo o potencial de duas cargas puntiformes, ele satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos, menos aqueles onde as cargas estão. Portanto, em toda a região descrita. Além disso, ele se anula no infinito, e o leitor não terá dificuldades para provar que, numa superfície esférica infinitamente próxima de q, o potencial é $\frac{q}{\epsilon}$. Resta mostrar que este potencial é zero na superfície da esfera condutora. Isto também é facil. Sejam d e d', respectivamente, as distâncias do ponto q e do ponto Q' ao centro da esfera. Mostra-se facilmente, da semelhança de triângulos, que

$$dd' = R^2 \tag{24}$$

[1] Lord Kelvin foi o físico inglês mais famoso de sua época, mesmo tendo sido contemporâneo de Maxwell , que hoje consideramos superior. Além de sua contribuição imortal à segunda lei da termodinâmica, realizou uma vastíssima obra que cobriu toda a física. Mas sua fama popular veio de sua contribuição, essencial, ao projeto de construção, e instalação, do primeiro *cabo submarino*, um fio submarino que ligou a Inglaterra aos Estados Unidos e deu origem à telefonia e telegrafo de longas distâncias. Kelvin instalou pessoalmente o cabo que projetara, e sua aventura, pois disso se tratou, foi acompanhada pelos jornais com grande sensação.

Ainda da semelhança de triângulos segue que

$$\frac{s'}{R} = \frac{s}{d} \tag{25}$$

ou

$$s' = \frac{R}{d}s \tag{26}$$

Suponhamos que exista uma carga q' no ponto Q. O potencial criado pelas cargas q e q' no ponto P (que é um ponto genérico da superfície do condutor) é:

$$\phi(P) = \frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \tag{27}$$

ou

$$\phi(P) = \frac{1}{s}\left(q + \frac{d}{R}q'\right) \tag{28}$$

Se tomarmos $q' = -q\frac{R}{d}$ teremos $\phi(P) = 0$ em todos os pontos da superfície ezférica. Era o que queríamos. Portanto, o potencial criado por uma carga puntiforme q diante de um condutor esférico aterrado, e distante d do centro da esfera é, para pontos externos à esfera, equivalente ao potencial das cargas q e q' apenas descritas. Ora, o potencial dessas cargas é muito facil de calcular. De fato, seja P' um ponto qualquer fora do condutor, distante S da carga q, e S' da carga q'. Temos,

$$\phi(P') = \frac{q}{S} + \frac{q'}{S'} \tag{29}$$

A partir deste potencial podemos calcular o campo elétrico $\vec{E}$ desta mesma distribuição física de cargas e, finalmente, chegar a uma expressão para a densidade de cargas que se instala na superfície do condutor por influência da carga externa q. Estes últimos caálculos ficam como um exerício facil para o leitor.

6 Apêndice

A equação

$$\int dV u \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi u(0) \tag{30}$$

merece tratamento especial. Em primeiro lugar, porque uma cálculo apressado de $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r}$ dá zero, o que daria zero para o primeiro membro. Mas esse cálculo está errado, pois a função $\frac{1}{r}$ é descontínua no ponto $r = 0$. Uma maneira de descobrir que o laplaceano de $\frac{1}{r}$ não é sempre zero é pelo uso do teorema do divergente. De fato,

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = div\ grad\ \frac{1}{r} = -div\ \frac{\vec{r}}{r^3}$$

logo, tomando uma esfera de raio R

$$\int dV \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -\int dV div\ \frac{\vec{r}}{r^3} = -\int_S \frac{\vec{r}}{r^3}.\vec{n} dS \tag{31}$$

e isto é o fluxo do campo elétrico $\frac{-\vec{r}}{r^3}$, que é o campo de uma carga -1 colocada na origem. Logo, pelo teorema de Gauss, esse fluxo é igual a -4π. Conseqüentemente, o primeiro membro da Eq.(31) não pode ser zero, ou seja, $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r}$ não pode ser identicamente zero. No entanto, para $r \neq 0$, o laplaceano é nulo, pois a função é contínua, e o cálculo direto está correto. Logo, é no ponto $r = 0$ que acontece alguma coisa interessante. Incidentalmente, mostramos que

$$\int dV \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \tag{32}$$

Voltemos ao cálculo da Eq.(30). Note-se que, para qualquer $r \neq 0$, $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = 0$, ou seja, o valor da função u para $r \neq 0$ é irrelevante para o cálculo da integral, uma vez que vem sempre multiplicado por 0. O único valor de u que interessa é $u(0)$. Logo, a integral não se altera se substituirmos u pela função constante que tem o valor $u(0)$ em todos os pontos. Assim,

$$\int dV u \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = \int dV u(0) \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = u(0) \int dV \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi u(0) \tag{33}$$

que é o resultado que queríamos obter.

Em tratamentos mais avançados se demonstra a seguinte relação:

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}) \tag{34}$$

onde, no segundo membro, aparece a "função" delta de Dirac. Este resultado sintetiza o resultado anterior e muitos outros semelhantes. Veja, por exemplo, as minhas notas sobre as funções de Green, e sobretudo, a grande obra de Dirac [5], "Principles of Quantum Mechanics", tida por muitos como o maior livro de Física desde os "Principia" de Newton[6].

References

[1] M. Spivak, *Differential Calculus on Manifolds*

[2] R. Buck, *Advanced Calculus*

[3] W. Fleming, *Functions of Several Variables*

[4] J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, New York.

[5] P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press.

[6] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, tradução inglesa de Andrew Motte.Great Books of the Encyclopaedia Britannica.