RADIAÇÃO

Henrique Fleming

31 outubro 2001

1 A função de Green retardada

A função de Green retardada é o potencial criado por uma fonte de intensidade 1, puntiforme "no espaço e no tempo", isto é, uma carga puntiforme que existe só num instante t', na posição $\vec{r'}$. Como vimos, este potencial é

$$G(\vec{r} - \vec{r'}, t - t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{1}$$

As expressões para os potenciais em termos da função de Green são:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'} \int dt' G(\vec{r} - \vec{r'}, t - t')\rho(\vec{r'}, t') \tag{2}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{r'} \int dt' G(\vec{r} - \vec{r'}, t - t')\vec{j}(\vec{r'}, t') \tag{3}$$

Consideremos, por exemplo, o potencial escalar ϕ. Usando a Eq.(1) na Eq.(3), temos

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'} \int dt' \rho(\vec{r'}, t') \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{4}$$

2 Os potenciais de Liénard-Wiechert

Queremos calcular agora o potencial de uma carga puntiforme de valor e cuja posição, variável com o tempo, é descrita pelo vetor $R(t')$. Logo,

$$\rho(\vec{r'}, t') = e\delta\left(\vec{r'} - \vec{R}(t')\right) \tag{5}$$

e a expressão para ϕ fica

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'} \int dt' e\delta\left(\vec{r'} - \vec{R}(t')\right) \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{6}$$

A integração em $\vec{r}'$ é imediata, dando

$$\phi(\vec{r},t) = e\int dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|} \tag{7}$$

Resta calcular a integral em t', o que passamos a fazer.

O integrando possui uma $\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right)$ que é da forma geral $\delta\left(f(t')\right)$, com

$$f(t') = t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c} \tag{8}$$

Seja t_0 o valor de t' tal que

$$t - t_0 - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|}{c} = 0 \tag{9}$$

A fórmula a ser usada é

$$\delta\left(f(t)\right) = \left(\frac{1}{|\frac{df}{dt}|}\right)_{t=t_0} \delta(t-t_0) \tag{10}$$

Realizamos este cálculo no Apêndice. O resultado é:

$$\delta\left(f(t')\right) = \left(\frac{1}{|1 - \frac{\vec{v}}{c}.\frac{\vec{r}-\vec{R}(t')}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}|}\right)_{t_0} \delta(t'-t_0) \tag{11}$$

onde introduzimos a notação $\vec{v}(t') = \frac{d\vec{R}}{dt'}$. Levando este resultado à Eq.(7), temos

$$\phi(\vec{r},t) = e\int dt' \frac{\delta(t'-t_0)}{|\vec{r}-\vec{R}(t')||1 - \frac{\vec{v}}{c}.\frac{\vec{r}-\vec{R}(t')}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}|} \tag{12}$$

ou,

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{e}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0) - \frac{\vec{v}}{c}.(\vec{r}-\vec{R}(t_0))|} \tag{13}$$

Um cálculo análogo dá

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e(\vec{v}(t_0)/c)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0) - \frac{\vec{v}}{c}.(\vec{r}-\vec{R}(t_0))|} \tag{14}$$

As Eqs.(13) e (14) são os *potenciais de Liénard- Wiechert*: são os potenciais eletromagnéticos de uma carga puntiforme com movimento arbitrário, sua posição sendo descrita pela função vetorial $\vec{R}(t)$. São resultados muito importantes, por sua generalidade. Vamos fazer uso deles para estudar, a seguir, o dipolo oscilante de Hertz. O cálculo dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ correspondentes às Eqs.(13) e (14) é um tanto complicado. Por isso, será feito no Apêndice. O leitor interessado fará bem em estudar também essa parte, pois contém a demonstração de um fato muito importante: uma carga acelerada irradia.

3 O dipolo de Hertz

A personalidade dominante neste tópico é o grande Heinrich Hertz. As ondas de radio eram conhecidas, pelos que falam difícil (como os locutores esportivos...) como *ondas hertzianas*. Segue-se uma pequena biografia que copiei do livro de Sommerfeld, *Electrodynamics*. É parte de uma coleção de física teórica, de 6 volumes, todos esplêndidos, e de leitura deliciosa, pela riqueza de comentários humanos e práticos que o orientador de Heisenberg, Pauli, Bethe, etc, gostava de incluir no texto.

Heinrich Hertz (1857-1894): he was born in Hamburg the son of a respected merchant family; his father was in later years Senator of the Free City. Initially his great modesty prevented Heinrich Hertz from entering the career of a scholar; instead, he turned to engineering at the Technische Hochschule in Munich. Soon, however, he begged his father to permit him to transfer to pure physics. He studied first in Munich, then in Berlin, and became the favorite student and assistant of Helmholtz. A prize problem set up by Helmholtz directed him to the testing of Maxwell's theory. After a short term as a Privatdozent in Kiel he was called to the Technische Hochschule in Karlsruhe. Even the earliest papers of Hertz show his mastery in relating theory and experiment. Several of them received the warm recognition of his colleagues, as his quantitative determination of hardness among engineers, and his description of the condensation processes in rising air currents among meteorologists. His years in Karlsruhe, from 1885 to 1889, represent the high point in his creative activity. We mention in particular his paper of 1888, *Forces of electrical oscillations treated by Maxwell's theory*. It is amazing how much of the later development of radio telegraphy has been anticipated in this paper. He is also the discoverer of the photoelectric effect, explained later by Einstein in terms of photons, conceived then for the first time.

Trata-se de estudar a radiação eletromagnética produzida por uma fonte oscilante localizada: um dipolo oscilante. Uma carga $-e$ está localizada na origem; uma carga $+e$ oscila, em torno da origem, sendo $\vec{s}(t)$ seu vetor de posição. Então, no momento t, o momento elétrico de dipolo é

$$\vec{p}(t) = e\vec{s}(t) \tag{15}$$

Em termos da notação usada na seção anterior, $\vec{s}(t) = \vec{R}(t)$. Além disso,

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = e\frac{d\vec{s}}{dt} = e\vec{v}(t) \tag{16}$$

Podemos, portanto, construir imediatamente os potenciais. Usando a Eq.(14) obtemos

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{c\left(|\vec{R}(t_0) - \vec{r}| + \frac{\vec{v}(t_0)}{c}.\left(\vec{R}(t_0) - \vec{r}\right)\right)} \tag{17}$$

com uma expressão análoga para ϕ. Vamos considerar o caso em que

$$\vec{s}(t) = \vec{s}(0)\sin\omega t \tag{18}$$

ou seja,

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

que dá

$$\dot{\vec{p}}(t) = \omega \vec{p}_0 \cos \omega t \tag{19}$$

No movimento da carga positiva, a velocidade máxima alcançada é $v = \omega s$, onde s é a sua distância máxima à origem. Então,

$$\frac{v}{c} = \frac{\omega s}{c} = \frac{2\pi s}{\lambda} \tag{20}$$

Supondo $\frac{v}{c} \ll 1$ devemos então ter $|\vec{s}| \ll \lambda$ Vamos adotar esta aproximação, chamada *aproximação de ondas longas*. Suporemos, além disso, que $|\vec{r}| \gg |\vec{R}(t_0)|$, ou seja, que estamos observando o potencial em pontos distantes da região ocupada pelo dipolo. Nestas condições,

$$|\vec{R}(t_0) - \vec{r}| + \frac{\vec{v}(t_0)}{c} . \left(\vec{R}(t_0) - \vec{r}\right) \approx r \tag{21}$$

e

$$t_0 = t - \frac{r}{c} \tag{22}$$

Logo,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{cr} = \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{cr} \tag{23}$$

O cálculo de $\phi(\vec{r}, t)$ é delicado, pois temos de manter a mesma ordem de aproximação. A maneira mais simples de fazer isso é usar a condição de Lorentz, $div\ \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. Temos, então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -div\ \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \tag{24}$$

Logo,

$$\phi(\vec{r}, t) = -div\ \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \tag{25}$$

Ora[1],

$$div \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r} = \frac{1}{r} div\ \vec{p}(t - \frac{r}{c}) + grad \frac{1}{r}\ . \vec{p}(t - \frac{r}{c}) \tag{26}$$

Mas,

$$div\ \vec{p}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{cr} \vec{r} . \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \tag{27}$$

logo,

$$div\ \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r} = -\frac{1}{cr^2} \vec{r} . \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) - \frac{1}{r^3} \vec{r} . \vec{p}(t - \frac{r}{c}) \tag{28}$$

[1] Ora!!! Pois é, este é o estilo da física, da matemática... Precisamos urgentemente do nosso Machado de Assis, ou do nosso João Guimarães Rosa!

Concluíndo,

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{p}}.\vec{r}}{r^2c} + \frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3} \tag{29}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{p}}}{rc} \tag{30}$$

Pondo, em particular,

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t \tag{31}$$

tem-se

$$\dot{\vec{p}} = \omega \vec{p}_0 \cos \omega t \tag{32}$$

e

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{\omega \vec{p}_0.\vec{r}}{cr^2} \cos \omega (t - \frac{r}{c}) + \frac{\vec{p}_0.\vec{r}}{r^3} \sin \omega (t - \frac{r}{c}) \tag{33}$$

e

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\omega \vec{p}_0}{cr} \cos \omega (t - \frac{r}{c}) \tag{34}$$

Suponhamos que $r \gg \lambda$ (*zona de radiação*). Então,

$$\frac{\omega r}{c} = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \tag{35}$$

Na expressão para ϕ, a relação do primeiro termo para o segundo é da ordem de $\frac{\omega r}{c}$, logo, para $r \gg \lambda$, o primeiro termo é dominante. Então,

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{\omega \vec{p}_0.\vec{r}}{cr^2} \cos \omega (t - \frac{r}{c}) \tag{36}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\omega \vec{p}_0}{cr} \cos \omega (t - \frac{r}{c}) \tag{37}$$

No problema há três escalas de distância: $|\vec{R}|$, λ e r. Estamos sempre supondo que $|\vec{R}| \ll \lambda$. Restam então duas possibilidades a analisar: a primeira, já vista, é quando $r \gg \lambda$, que é a chamada zona de onda, ou zona de radiação. A segunda corresponde a $r \ll \lambda$ (mas ainda com $r \gg |\vec{R}|$). Neste caso, temos que

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{\vec{p}_0.\vec{r}}{r^3} \sin \omega (t - \frac{r}{c}) \tag{38}$$

$$= \frac{\vec{p}_0.\vec{r}}{r^3} \left(\sin \omega t \cos \frac{\omega r}{c} - \cos \omega t \sin \frac{\omega r}{c} \right) \tag{39}$$

$$\approx \frac{\vec{p}_0.\vec{r}}{r^3} \sin \omega t \tag{40}$$

que é o potencial estático de um dipolo com momento variável. Os campos obtidos são os campos estáticos

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{r^5} \tag{41}$$

$$\vec{B} = \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3} \tag{42}$$

Na zona de radiação tudo é bem diferente:

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2}\{-\frac{\ddot{\vec{p}}}{r} + \frac{(\ddot{\vec{p}}.\vec{r})\vec{r}}{r^3}\} \tag{43}$$

$$= \frac{\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \frac{\ddot{\vec{p}}}{r}\right)}{c^2} \tag{44}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2} \tag{45}$$

3.1 O vetor de Poynting

Temos

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi}E^2\vec{n} \tag{46}$$

Se o ângulo entre $\vec{p}$ e $\vec{n}$ for θ, teremos então

$$\vec{S} = \frac{\ddot{\vec{p}}^2 sen^2\theta}{4\pi c^3 r^2}\vec{n} \tag{47}$$

ou ainda, explicitando a dependência no tempo,

$$\vec{S} = \frac{\omega^4 p_0^2}{4\pi c^3 r^2} sen^2\theta sen^2\omega t\,\vec{n} \tag{48}$$

A potência média por cm^2 por período é dada por

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int S(t)dt \tag{49}$$

onde T é o período. Lembrando que

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt sen^2\omega t = \frac{1}{2} \tag{50}$$

temos

$$\langle S \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3 r^2} sen^2\theta \tag{51}$$

Uma conclusão importante é que o dipolo oscilante tem uma potência que depende fortemente da freqüência (ω^4!). Isto é a base da explicação de Rayleigh para a cor azul do céu[2].

Lord Rayleigh foi um dos maiores físicos da virada do século XIX para o XX. É tido como o maior dos físico-matemáticos, mas mesmo isto o diminuiria, pois fez também descobertas experimentais muito importantes, como a do elemento argônio. Sua obra mais famosa é um grande tratado sobre a Acústica, *The Theory of Sound*. Sendo um homem muito rico, trabalhava, e tinha seus laboratórios, em um sítio nos arredores de Londres. Sua irmã era casada com Lord Balfour, um dos mais famosos primeiros-ministros da Inglaterra. Entre os muitos documentos manuscritos que deixou, encontram-se alguns escritos no verso de folhas com o timbre *Downing Street 10*, que é o enderço do primeiro-ministro. Tony Blair mora lá. Usava-os como rascunho!

---

[2] A ser vista em detalhe no capítulo do espalhamento da radiação

3.2 Aspecto dos campos produzidos

Usando a notação exponencial a quantidade complexa cuja parte real é $\vec{p}_0 sen\omega t$ é

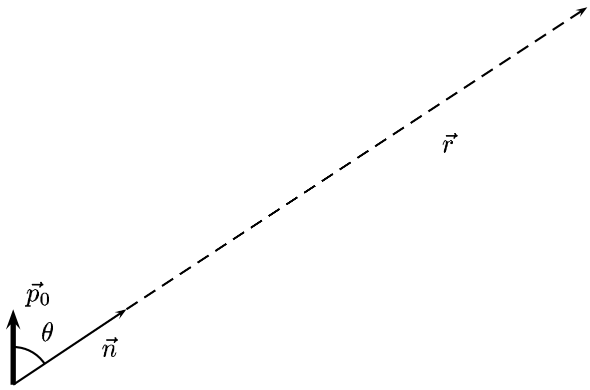
$$\vec{p} = i\vec{p}_0 e^{-i\omega t} \tag{52}$$

O campo elétrico produzido pelo dipolo oscilante pode então ser escrito

$$\vec{E} = \frac{i\omega^2}{c^2}\{\vec{p}_0 - (\vec{p}_0.\vec{n})\vec{n}\}\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \tag{53}$$

e, lembrando que $k = \frac{\omega}{c}$, podemos escrever

$$\vec{E} = ik^2\{\vec{p}_0 - (\vec{p}_0.\vec{n})\vec{n}\}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{54}$$



Suponhamos que a direção de observação seja perpendicular a $\vec{p}_0$. Então, $\vec{p}_0.\vec{n} = 0$ e

$$\vec{E} = ik^2\vec{p}_0\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{55}$$

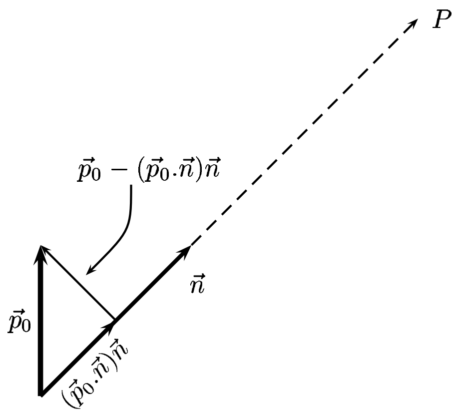
e, para $r \gg \lambda$,

$$\vec{E}(r + n\lambda) - \vec{E}(r) = -n\frac{\lambda}{r}\vec{E}(r) \tag{56}$$

o que mostra que o módulo de $\vec{E}$ só varia sensivelmente se r tem seu valor aumentado de um grande número de comprimentos de onda. Ou seja, a grandes distâncias a onda produzida por um dipolo oscilante é aproximadamente plana. O termo

$$\vec{p}_0 - (\vec{p}_0.\vec{n}) \tag{57}$$

que aparece na expressão de $\vec{E}$ tem uma interpretação geométrica simples, mostrada na figura abaixo.



De uma maneira geral, cada observador (olhando de P na direção $\vec{n}$) "vê" um dipolo de módulo igual à projeção do verdadeiro dipolo na direção perpendicular a $\vec{n}$. O campo elétrico que o atinge é proporcional a essa projeção; a intensidade é proporcional ao quadrado dela. Assim, tanto em intensidade quanto em polarização, é a projeção do momento de dipolo na direção perpendicular à de observação que determina tudo. Em particular, olhando-se na direção do próprio dipolo, não se deteta nenhum campo de radiação.

4 Apêndice

4.1 Uma derivada importante

Nesta seção realizamos em detalhe o cálculo prometido acima. A função cuja derivada (em t') devemos calcular é:

$$f(t') = t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c} \tag{58}$$

Temos

$$\frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}|\vec{r} - \vec{R}(t')| \tag{59}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt'}|\vec{r} - \vec{R}(t')| &= \frac{d}{dt'}\sqrt{(\vec{r} - \vec{R}(t')).(\vec{r} - \vec{R}(t'))} && (60)\\
&= \frac{1}{2|\vec{r} - \vec{R}(t')|}2\left(\vec{r} - \vec{R}(t')\right).(-\vec{v}(t')) && (61)\\
&= -\frac{(\vec{r} - \vec{R}(t')).\vec{v}(t')}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} && (62)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\delta\left(f(t')\right) = \frac{1}{\left|1 - \frac{v}{c}.\frac{(\vec{r}-\vec{R}(t'))}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\right|_{t_0}} \, \delta(t' - t_0) \tag{63}$$

como prometido.

4.2 Os campos de Liénard-Wiechert

Vamos introduzir a notação

$$s = |\vec{r} - \vec{R}(t_0)| - \frac{\vec{v}(t_0)}{c}.\left(\vec{r} - \vec{R}(t_0)\right) \tag{64}$$

Usando-a, tem-se, para os potenciais de Liénard-Wiechert (13) e (14),

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{e}{s} \tag{65}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e\vec{v}}{cs} \tag{66}$$

O campo elétrico é escrito em termos dos potenciais como:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} && (67)\\
&= -e\left[\vec{\nabla}\frac{1}{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}}{cs}\right] && (68)\\
&= -e\left[-\frac{1}{s^2}\vec{\nabla}s + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{v}}(t_0)\frac{\partial t_0}{\partial t}\frac{1}{s} - \frac{1}{c^2}\frac{\vec{v}(t_0)}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial t}\right] && (69)
\end{aligned}$$

Cálculo de $\frac{\partial t_0}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{R}(t_0)| - c(t - t_0) &= 0 && (70)\\
\frac{\partial}{\partial t}|\vec{r} - \vec{R}(t_0)| - c + c\frac{\partial t_0}{\partial t} &= 0 && (71)\\
\frac{\partial}{\partial t_0}|\vec{r} - \vec{R}(t_0)|\frac{\partial t_0}{\partial t} - c + c\frac{\partial t_0}{\partial t} &= 0 && (72)
\end{aligned}$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial t}|\vec{r} - \vec{R}(t_0)| = \frac{[\vec{R}(t_0) - \vec{r}].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_0)|}\ , \tag{73}$$

logo,

$$\frac{[\vec{R}(t_0) - \vec{r}].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_0)|}\frac{\partial t_0}{\partial t} - c + c\frac{\partial t_0}{\partial t} = 0 \tag{74}$$

de onde segue imediatamente que

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{[\vec{r}-\vec{R}(t_0)].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|c}} \tag{75}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial t_0} &= \frac{\partial}{\partial t_0}\left[|\vec{r}-\vec{R}(t_0)| - \frac{\vec{v}(t_0)}{c}.(\vec{r}-\vec{R}(t_0))\right] &(76)\\
&= \frac{[\vec{r}-\vec{R}(t_0)].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|} - \frac{\dot{\vec{v}}(t_0)}{c}.\left(\vec{r}-\vec{R}(t_0)\right) + \frac{\vec{v}^2(t_0)}{c} &(77)
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente,

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= -e\left(-\frac{1}{s^2}\vec{\nabla}s + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{v}}(t_0)\frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{[\vec{r}-\vec{R}(t_0)].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|c}}\right) &(78)\\
&- e\left(\frac{1}{c^2}\frac{\vec{v}}{s^2}\left[\frac{[\vec{r}-\vec{R}(t_0)].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|} - \frac{\dot{\vec{v}}(t_0)}{c}.\left(\vec{r}-\vec{R}(t_0)\right) + \frac{\vec{v}^2(t_0)}{c}\right]\frac{1}{1-\frac{[\vec{r}-\vec{R}(t_0)].\vec{v}(t_0)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|c}}\right)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\vec{\nabla}s = \frac{\vec{r}-\vec{R}(t_0)}{|\vec{r}-\vec{r}-\vec{R}(t_0)|} - \frac{\vec{v}(t_0)}{c} \tag{79}
$$

temos, juntando tudo,

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= e\left[-\frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}{s^3}\{(\vec{R}-\vec{r}) + \frac{\vec{v}}{c}|\vec{R}-\vec{r}|\}\right]_{t_0} &(80)\\
&+ e\left[\frac{1}{s^3c^2}(\vec{R}-\vec{r})\times\left((\vec{R}-\vec{r}+\frac{\vec{v}}{c}|\vec{R}-\vec{r}|)\times\dot{\vec{v}}\right)\right]_{t_0}
\end{aligned}
$$

Aqui vemos o campo elétrico dividido claramente em duas partes: a primeira cai com a quadrado da distância; a segunda, que cai linearmente com a distância, é o campo de radiação. Existe apenas quando $\dot{\vec{v}}$ é diferente de zero, ou seja, quando a carga é acelerada.