1 Apêndice

1.1 A função delta de Dirac

A chamada função delta de Dirac foi introduzida pelo grande Paul Dirac para simplificar o tratamento de certos problemas da mecânica quântica. Aqui vamos adaptar o formalismo ao eletromagnetismo. Não se trata de matemática rigorosa, e sim de uma abreviação, muito intuitiva e eficaz, da teoria das distribuições de Laurent Schwartz. O feito de Schwartz, que lhe valeu a medalha Fields (mais ou menos o prêmio Nobel de matemática), foi transformar as idéias geniais de Dirac em matemática "politicamente correta", bem como ampliar enormemente suas aplicações a outros ramos da matemática, pura e aplicada.[1]

Definimos a função delta assim:

$$\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} \tag{1}$$

Em consequência da definição, temos

$$\int dV\delta(\vec{r}) = 1 \tag{2}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int dV\delta(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int dV\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\int_S \vec{\nabla}\frac{1}{r}.\vec{n}dS \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.\vec{n}dS = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S r^2 d\Omega = 1
\end{aligned}$$

Da definição segue imediatamente que

$$\delta(\vec{r}) = 0 \quad para \ \ \vec{r} \neq 0 \ .$$

A mais importante propriedade da δ é a seguinte:

$$\int dV\delta(\vec{r})f(\vec{r}) = f(\vec{0}) \tag{3}$$

Demonstração: na primeira integral de 3 , o único valor de $f(\vec{r})$ que interessa é $f(\vec{0})$, já que, para qualquer outro valor de $\vec{r}$, o produto $\delta(\vec{r})f(\vec{r})$ é zero. Logo,$f(\vec{r})$ pode ser substituída pela função constante $f(\vec{0})$ sem mudar o valor da integral. Então,

$$\int dV\delta(\vec{r})f(\vec{r}) = \int dV\delta(\vec{r})f(\vec{0}) = f(\vec{0})\int dV\delta(\vec{r}) = f(\vec{0})$$

[1] Laurent Schwartz é um dos grandes matemáticos dos últimos tempos, um grande defensor da qualidade do ensino superior e uma pessoa extremamente interessante. Esteve no Brasil muitas vezes. Colaborou freqüentemente com a Profa. Carmen Lys Ribeiro Braga, do Instituto de Física da USP, e colecionava borboletas, que caçava na Floresta da Tijuca, no Rio de Janeiro. Um reporter, surpreso com o tempo que ele dedicava a esse passatempo, perguntou-lhe se as borboletas eram tão importantes quanto a matemática, ao que ele respondeu:*Les papillons sont la seule chose importante...*

Mais geralmente, temos:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{4}$$

$$\int dV\delta(\vec{r}-\vec{a})f(\vec{r}) = f(\vec{a}) \tag{5}$$

$$\int dV\delta(\vec{r}-\vec{a}) = 1 \tag{6}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = \delta(\vec{r'}-\vec{r}) \tag{7}$$

Uma demonstração quase física da Eq. 6 é obtida assim:

$$\int dV\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = -\frac{1}{4\pi}\int dV\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -\frac{1}{4\pi}\int dV\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int dV\vec{\nabla}.(\frac{\overrightarrow{r-r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}) = \frac{1}{4\pi}\int dV\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\int_S \vec{E}.\vec{n}dS$$

onde $\vec{E} = \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$ é o campo elétrico de uma carga unitária localizada em $\vec{r'}$. Logo, pelo teorema de Gauss,

$$\frac{1}{4\pi}\int dS\vec{E}.\vec{n} = 1$$

Conclui-se, então, que $\int dV\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = 1$.[2]

1.2 Aplicação: solução da equação de Poisson

No nosso estudo da eletrostática obtivemos a seguinte equação para o potencial escalar (equação de Poisson):

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{8}$$

Usando o princípio de superposição tínhamos a seguinte expressão para o potencial, em termos da densidade de carga:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r'}\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{9}$$

É intuitivo que 9 seja a solução de 8 (para densidades de carga que tendam a zero a grandes distâncias). Vamos mostrar agora que isto é efetivamente verdade. Note-se que, pela definição de $\delta(\vec{r})$,

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}) \tag{10}$$

[2]Mais precisamente, $\int dV\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = 1$ se o ponto $\vec{r'}$ estiver no volume V, e é 0 se $\vec{r'}$ for um ponto externo a V.

Vamos mostrar que 9 satisfaz efetivamente a 8. Aplicando o operador $\vec{\nabla}^2$ à 9, temos

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r'}\vec{\nabla}^2(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|})\rho(\vec{r'}) = \int d^3\vec{r'}(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})\rho(\vec{r'})) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{11}$$

que é o que se queria provar. Neste cálculo é essencial o fato de que $\vec{\nabla}^2$ atua somente sobre a variável $\vec{r}$, e não sobre a $\vec{r'}$.

2 Funções de Green

Seja L um operador diferencial linear e considere a equação diferencial

$$L\phi(\vec{r}) = -4\pi s(\vec{r}) \tag{12}$$

onde s é uma função dada, denominada *fonte* e ϕ é a função incógnita. Denomina-se função de Green do operador linear L, a função $G(\vec{r}-\vec{r'})$ tal que

$$LG(\vec{r}-\vec{r'}) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}) \tag{13}$$

com condições de contorno definidas pelo particular problema. Uma vez determinada a função de Green, a Eq. 12 pode ser resolvida facilmente. De fato, vamos mostrar que

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r'}G(\vec{r}-\vec{r'})s(\vec{r'}) \tag{14}$$

é solução de 12. Basta aplicar o operador L à 14. Temos

$$L\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r'}LG(\vec{r}-\vec{r'})s(\vec{r'}) = \int d^3\vec{r'}(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}))s(\vec{r'}) = -4\pi s(\vec{r}) \tag{15}$$

Para um exemplo, considere o operador linear Laplaceano, $\vec{\nabla}^2$. Na Eq. 10 lemos que $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ é precisamente a função de Green. De fato, o método usado acima para construir a solução da equação de Poisson é exatamente o método da função de Green, que acabamos de descrever.

George Green foi um físico-matemático de primeira grandeza, embora tenha sido sempre um amador, e nunca tenha tido qualquer diploma universitário. Seu pai era dono de um moinho, trabalhava duro e achava que esse negócio de física- matemática era coisa de ... Deixa prá lá! Estudando por conta própria Green descobriu praticamente todos os métodos matemáticos da teoria de campos, entre os quais a função de Green e os potenciais ϕ e $\vec{A}$. Publicou, em pequena tiragem, por conta própria, suas descobertas em um tratado, que se tornou obra ambicionadíssima e rara, naqueles tempos sem xerox. Quando o jovem William Thomson, depois Lord Kelvin, visitou Paris, havia uma fila de físicos e matemáticos eminentes querendo ter uma entrevista com aquele jovem quase desconhecido. O que eles queriam era tomar emprestado o tratado de Green, do qual Kelvin era o feliz possuidor de uma cópia.

2.1 A função de Green do d'Alembertiano

Este estranho nome vem de d'Alembert, grande matemático e enciclopedista francês. [3] Pela definição de função de Green, devemos ter

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r}-\vec{r'},t-t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\vec{r}-\vec{r'},t-t')}{\partial t^2} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})\delta(t-t') \tag{16}$$

Uma observação crucial: G deve ser esfericamente simétrica, uma vez que é o potencial de uma carga puntiforme que existe só no instante $t = t'$. Logo, $G(\vec{r}-\vec{r'},t-t') = G(|\vec{r}-\vec{r'}|,t-t')$. Vai ser conveniente introduzir as variáveis $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r'}$ e $T = t-t'$. Pode-se então dizer que $G(\vec{R},T) = G(R,T)$, onde $R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$.

Aqui introduzimos uma função δ unidimensional, $\delta(t-t')$. A definição é a mesma: $\delta(t-t') = 0$ exceto quando $t = t'$, sendo infinita neste ponto de tal forma que $\int_{-\infty}^{\infty} dt\delta(t-t') = 1$. É um exercício facil mostrar que $\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$.

Para determinar G, observemos que, para $\vec{r} \neq \vec{r'}$, a Eq. 16 fica reduzida a

$$\vec{\nabla}^2 G(R,T) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(R,T)}{\partial T^2} = 0 \tag{17}$$

Para melhor explorar a simetria esférica, passemos a coordenadas esféricas. O Laplaceano fica então reduzido à parte que contém derivadas em R, que é [4]

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial}{\partial R}f) \tag{18}$$

Portanto, a Eq. 17 se escreve

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial}{\partial R}G) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = 0 \tag{19}$$

Vamos introduzir agora a função $u(R,T)$, definida através da relação

$$G(R,T) = \frac{u(R,T)}{R}$$

com $u(R=0) = 0$. O leitor verificará facilmente que, em termos de u, a Eq. 19 se escreve

$$\frac{\partial^2 u(R,T)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = 0 \tag{20}$$

[3] d'Alembert, filho bastardo de um nobre francês, distinguiu-se na mecânica (princípio dos trabalhos virtuais) e, sobretudo, no estudo da corda vibrante, que resolveu completamente. A equação $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ é chamada equação de d'Alembert, que determinou sua solução geral. O d'Alembertiano é o operador diferencial $\vec{\nabla}^2 - (1/c^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Além disso, elaborou, com Diderot, a famosa *Encyclopédie*, que reunia todo o conhecimento da época sob o otimismo da corrente filosófica do Iluminismo, que conduziu à Revolução Francesa.

[4] Sujou? Não se preocupe. Os físicos olham essas coisas em tabelas, ou apêndices de livros. Aprende-se a deduzir esses resultados em Física Matemática I. E aí, *a primeira dedução a gente nunca esquece...*

que é a equação de d'Alembert! Como sabemos, sua solução geral é

$$u(R,T) = f(T - \frac{R}{c}) + g(T + \frac{R}{c}). \tag{21}$$

onde f e g são funções arbitrárias dos argumentos indicados. Conseqüentemente, a solução geral da Eq. 19 é

$$G(R,T) = \frac{f(T-\frac{R}{c})}{R} + \frac{g(T+\frac{R}{c})}{R} \tag{22}$$

Isto é o que pode ser obtido considerando apenas o caso $\vec{r} \neq \vec{r'}$. Para obter as expressões detalhadas de f e g precisaremos estudar o que ocorre quando $\vec{r} = \vec{r'}$. A função f representa uma onda esférica emergente, de origem em $R = 0$ e que nasce em $T = 0$; em contraposição, a função g é uma onda esférica incidente, que converge para o ponto $R = 0$, e o atinge em $T = 0$. Ora, estas ondas são conseqüências de uma carga puntiforme que existiu apenas no instante $T = 0$. Logo, a onda incidente, que <u>morre</u> em $T = 0$, viola a causalidade, pois existe antes de sua causa. Devemos, portanto, tomar $g = 0$ na solução geral.

Na Eq. 16 temos, no primeiro membro, um termo que contém derivadas nas coordenadas (escondidas sob o símbolo $\vec{\nabla}^2$) e outro que contém derivadas no tempo. A função de Green é um potencial que se anula no infinito, e, portanto, tipicamente, uma potência negativa de $|\vec{r} - \vec{r'}|$. Por exemplo, $\frac{1}{R^n}$. Quando se deriva em relação às coordenadas obtém-se, *grosso modo*, $\frac{1}{R^{n+s}}$, se se derivou s-vezes. O Laplaceano contém derivadas de segunda ordem, logo, o termo que o contém será da forma $\frac{1}{R^{n+2}}$. Em contraposição, o termo que contém derivadas no tempo não modifica a dependência com R. Assim, depois de calcular os dois termos do primeiro membro, teremos um da forma $\frac{1}{R^{n+2}}$ e outro da forma $\frac{1}{R^n}$. Para R indo a 0, ou, o que é o mesmo, para $\vec{r}$ indo a $\vec{r'}$, o termo de potência $n+2$ no denominador será muito maior, e podemos desprezar o outro, frente a ele. Neste limite, então, a equação para a função de Green será:

$$\vec{\nabla}^2 G(R,T) = -4\pi\delta(\vec{R})\delta(T) \tag{23}$$

Mas esta é nossa conhecida: é a equação de Poisson! Sua solução é (copiando cuidadosamente da Eq. 9):

$$G(R,T) = \int d^3\vec{R'} \frac{\delta(\vec{R'})\delta(T)}{|\vec{R} - \vec{R'}|} \tag{24}$$

A integral pode ser facilmente calculada usando a propriedade expressa na Eq. 3, dando

$$G(R,T) = \frac{\delta(T)}{R} \tag{25}$$

Mas isto é o limite, para R indo a 0, de

$$G(R,T) = \frac{f(T-\frac{R}{c})}{R} \tag{26}$$

logo, a função de Green deve ser

$$G(R,T) = \frac{\delta(T - \frac{R}{c})}{R} \tag{27}$$

ou, em todo o detalhe,

$$G(|\vec{r} - \vec{r'}|, t - t') = \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{28}$$

2.2 Potenciais retardados.

Estamos agora em condições de resolver as equações satisfeitas pelos potenciais escalar ϕ e vetor $\vec{A}$. Para ϕ a equação é:

$$\vec{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{29}$$

Pelo método das funções de Green, a solução que se anula no infinito é

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'} \int dt' G(\vec{r} - \vec{r'}, t - t')\rho(\vec{r'}, t') \ . \tag{30}$$

Substituindo G pelo seu valor (Eq. 28), temos

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'} \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\rho(\vec{r'}, t') \tag{31}$$

O valor de t' para o qual o argumento de $\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})$ se anula é $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}$. Portanto,

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'} \frac{\rho(\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{32}$$

que é a fórmula do potencial retardado que tínhamos proposto anteriormente por razões intuitivas. De maneira inteiramente análoga se obtém:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r'} \frac{\vec{j}(\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{33}$$

A partir dessas duas equações podemos, em princípio, resolver qualquer problema de radiação eletromagnética.