Simetrias fundamentais

Henrique Fleming
with a "little" help from
Julian Schwinger

20-12-2001

1 Transformações unitárias

Na mecânica quântica os estados, situações de máxima informação, são representados por vetores em um espaço complexo (*bras* $\langle\ |$ e *kets* $|\ \rangle$). As propriedades físicas são representadas por operadores lineares hermiteanos sobre este espaço. A liberdade existente na descrição física corresponde à liberdade de representação matemática associada a operadores unitários,

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1 \tag{1}$$

ou

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{2}$$

Quando vetores e operadores são transformados na forma seguinte:

$$\overline{\langle\ |} = \langle\ |U \tag{3}$$
$$\overline{|\ \rangle} = U^{-1}|\ \rangle \tag{4}$$
$$\overline{X} = U^{-1}XU \tag{5}$$

todas as relações numéricas entre vetores e operadores são conservadas:

$$\overline{\langle a'|b'\rangle} = \langle a'|b'\rangle \tag{6}$$
$$\overline{\langle a'|}\overline{X}\overline{|b'\rangle} = \langle a'|X|b'\rangle \tag{7}$$

Também a relação

$$\langle a'| = |a'\rangle^\dagger \tag{8}$$

é conservada:

$$\langle\overline{a'}| = \langle a'|U \tag{9}$$

e

$$|\overline{a'}\rangle^\dagger = (U^{-1}|a'\rangle)^\dagger = \langle a'|U \tag{10}$$

logo,

$$\langle\overline{a'}| = |\overline{a'}\rangle^\dagger \tag{11}$$

Finalmente,

$$\overline{X}^{\dagger} = \left(U^{-1}XU\right)^{\dagger} = U^{-1}X^{\dagger}U \tag{12}$$

de maneira que se X é hermiteano, $\overline{X}$ também o é.

Um conjunto completo de estados $\langle a'|$ forma uma base do espaço de estados. Um vetor arbitrário $|\ \rangle$ é representado por suas componentes $\langle a'|\ \rangle$ relativas a essa base. A expressão é:

$$|\ \rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\ \rangle \tag{13}$$

e a relação $\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1$ é a relação de completude (entre os físicos, "completeza").

A partir da base $\langle a'|$ pode-se obter uma outra, $\langle\overline{a'}|$, por uma trnasformação unitária

$$\langle\overline{a'}| = \langle a'|U \tag{14}$$

e as componentes do vetor $|\ \rangle$ serão

$$\langle\overline{a'}|\ \rangle = \langle a'|U|\ \rangle\ , \tag{15}$$

que podem também ser interpretadas como as componentes, relativas à base inicial, do vetor $U|\ \rangle$. Analogamente,

$$\langle\overline{a'}|X|\overline{a''}\rangle = \langle a'|UXU^{-1}|a''\rangle\ . \tag{16}$$

Suponhamos que sejam realizadas, sobre a base $\langle a\prime|$, primeiro uma transformação U_1, e a seguir uma U_2. Do ponto de vista "ativo", o vetor $|\ \rangle$ é levado em $U_1|\ \rangle$, e este em $U_2(U_1|\ \rangle)$. As componentes reagem assim:

$$\langle a'|\ \rangle \to U_1 \to \langle a'|U_1|\ \rangle \to U_2 \to \langle a'|U_2U_1|\ \rangle \tag{17}$$

Esta transformação é produzida, em 1 passo, pelo operador U_2U_1 A ordem oposta das operações é efetuada pelo operador U_1U_2. Seja $U_{[12]}$ o operador que liga as duas ordens, ou seja,

$$U_{[12]}U_1U_2 = U_2U_1 \tag{18}$$

Naturalmente,

$$U_{[12]} = U_2U_1U_2^{-1}U_1^{-1} = U_{[21]}^{-1} \tag{19}$$

Chama-se transformação unitária infinitesimal uma transformação da forma

$$U = 1 + i\epsilon G \tag{20}$$

onde ϵ é um número muito pequeno e G é hermiteano.Temos

$$U^{\dagger} = U^{-1} = 1 - i\epsilon G \tag{21}$$

No que se segue vamos, para aliviar a notação, supor *epsilon* incorporado a G. A transformação infinitesimal será, isto é, denotada por $1 + iG$.

Suponhamos que U_1 e U_2 sejam tansformação infinitesimais unitárias. O operador $U_{[12]}$ associado a eles é também unitário. Como a combinação de um número finito de transformações infinitesimais deve ser uma transformação infinitesimal, deve existir $G_{[12]}$ hermiteano, tal que

$$U_{[12]} = 1 + iG_{[12]} \tag{22}$$

Qual é a relação entre $G_{[12]}$, G_1 e G_2? Como $U_{[12]} = U_2 U_1 U_2^{-1} U_1^{-1}$, segue que

$$U_{[12]} = (1 + iG_2)(1 + iG_1)(1 - iG_2)(1 - iG_1) \tag{23}$$

$$= +iG_2 + iG_1 - iG_2 - iG_1 + i^2 G_2 G_1 - i^2 G_2 G_2 - i^2 G_1 G_2 - i^2 G_2 G_1 - i^2 G_1 G_1 + i^2 G_2 G_2$$

ou

$$U_{[12]} = 1 + i^2 \left(G_2 G_1 - G_1 G_2\right) + G_1 G_1 + G_2 G_2 \tag{24}$$

e, mantendo só os termos lineares,

$$U_{[12]} = 1 + i \left(\frac{1}{i} [G_1, G_2]\right) = 1 + iG_{[12]} \tag{25}$$

Note que os termos G_1^2 e G_2^2 são de segunda ordem, e são cancelados se se escreve a contribuição completa té segunda ordem, que é

$$U_{[12]} = (1 + iG_2 + \frac{i^2}{2!} G_2 G_2)(1 + iG_1 + \frac{i^2}{2!} G_1 G_1)(1 - iG_2 + \frac{i^2}{2!} G_2 G_2)(1 - iG_1 + \frac{i^2}{2!} G_1 G_1) \tag{26}$$

Desta maneira, obtemos

$$U_{[12]} = 1 + iG_{[12]} \tag{27}$$

com

$$G_{[12]} = -G_{[21]} = \frac{1}{i} [G_1, G_2] \tag{28}$$

que introduz o comutador $[G_1, G_2]$.

O efeito de uma transformação infinitesimal unitária sobre um operador é dado por

$$UXU^{-1} = (1 + iG)X(1 - iG) = X + iGX - iXG = X + \frac{1}{i} [X, G] \tag{29}$$

ou

$$UXU^{-1} = X + \delta X \tag{30}$$

com

$$\delta X = \frac{1}{i} [X, G] \ . \tag{31}$$

Da penúltima equação segue que

$$U^{-1}(UXU^{-1})U = U^{-1}XU + U^{-1}\delta XU \tag{32}$$

ou

$$X = U^{-1}XU + \delta X$$

ou seja,
$$U^{-1}XU = X - \delta X \tag{33}$$

uponhamos que
$$U_1 X U_1^{-1} = X + \delta_1 X \tag{34}$$

com
$$\delta_1 X = \frac{1}{i}\left[X, G_1\right] \tag{35}$$

Queremos calcular $U_2\delta_1 X U_2^{-1}$, onde $U_2 = 1 + iG_2$ é outra transformação infinitesimal unitária. Temos

$$(1+iG_2)\frac{1}{i}\left[X, G_1\right](1-iG_2) = \frac{1}{i}\left[X, G_1\right] + G_2\left[X, G_1\right] - \left[X, G_1\right]G_2 \tag{36}$$

de maneira que

$$U_2\delta_1 X U_2^{-1} = \delta_1 X + \frac{1}{i}\left[\frac{i}{i}\left[X, G_1\right], G_2\right] = \delta_1 X + \delta_2\delta_1 X \tag{37}$$

Mais geralmente,

$$U_2 U_1 X U_1^{-1} U_2^{-1} = U_2(X + \delta_1 X)U_2^{-1} = X + \delta_2 X + \delta_1 X + \delta_2\delta_1 X \tag{38}$$

e, naturalmente,

$$U_1 U_2 X U_2^{-1} U_1^{-1} = X + \delta_2 X + \delta_1 X + \delta_1\delta_2 X \tag{39}$$

Finalmente,

$$U_2 U_1 X U_1^{-1} U_2^{-1} - U_1 U_2 X U_2^{-1} U_1^{-1} = \delta_2\delta_1 X - \delta_1\delta_2 X \tag{40}$$

Notando que

$$\begin{aligned} U_2 U_1 &= U_{[12]} U_1 U_2 &(41)\\ U_1^{-1} U_2^{-1} &= U_2^{-1} U_1^{-1} U_{[12]}^{-1} &(42)\end{aligned}$$

esta última relação pode ser escrita

$$U_{[12]} U_1 U_2 X U_2^{-1} U_1^{-1} U_{[12]}^{-1} - U_1 U_2 X U_2^{-1} U_1^{-1} = \delta_{[12]} X \tag{43}$$

Obtém-se assim
$$\delta_{[12]} X = \delta_2\delta_1 X - \delta_1\delta_2 X \tag{44}$$

que, em termos de comutadores, é escrita:

$$\left[X, \left[G_2, G_1\right]\right] + \left[G_1, \left[X, G_2\right]\right] + \left[G_2, \left[G_1, X\right]\right] = 0 \tag{45}$$

que é a famosa identidade de Jacobi.

Consideremos agora um grupo de transformações unitárias de n parâmetros λ_a, $(a = 1, ..., n)$, abreviados por λ. Se U_{λ_1} e U_{λ_2} são operadores deste grupo, é necessário que

$$U(\lambda_2)U(\lambda_1) = U(\lambda) \tag{46}$$

onde $\lambda = \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ são os parâmetros de um outro elemento do grupo. Uma transformação infinitesimal do grupo, com parâmetros $\delta\lambda_a$, é construída a partir de

$$G = \sum_{a=1}^{n} \delta\lambda_a G_a \tag{47}$$

ou seja,

$$U = 1 + i \sum_{a=1}^{n} \delta\lambda_a G_a \ , \tag{48}$$

onde os n operadores hermiteanos G_a, agora finitos, são denominados geradores do grupo. Os geradores não são únicos, dependendo da escolha de parâmetros: transformações lineares reais e não-singulares dos parâmetros podem ser usadas para passar a um outro conjunto de geradores.

Seja $U(\delta\lambda)$ o operador de uma transformação infinitesimal. Submetendo-a a uma transformação unitária arbitrária, deve-se obter ainda uma transformação infinitesimal. Finalmente, devemos ter

$$U(\lambda)^{-1} G_a U(\lambda) = \sum_b u_{ab}(\lambda) G_b \tag{49}$$

onde os números $u_{ab}(\lambda)$ são reais. No espaço dos parâmetros podemos usar a notação matricial

$$U(\lambda)^{-1} G U(\lambda) = u(\lambda) G \tag{50}$$

Associada a esta, temos (aplicando U à esquerda, U^{-1} à direita):

$$G = u(\lambda) U(\lambda) G U(\lambda)^{-1} \tag{51}$$

$$U(\lambda) G U(\lambda)^{-1} = u^{-1}(\lambda) G \tag{52}$$

ou, finalmente,

$$U(\lambda) G U(\lambda)^{-1} = G\hat{u} \tag{53}$$

com

$$\hat{u} = \left(u^{-1}\right)^t \tag{54}$$

onde a^t é a transposta da matriz a.

Note-se que, se as u forem unitárias, temos

$$(u^{-1})^t = (u^\dagger)^t = (u^{*t})^t = u^* = u \tag{55}$$

de maneira que, para u unitárias, $\hat{u} = u$.

As matrizes u e $\hat{u}$ são *representações* do grupo unitário a n parâmetros $U(\lambda)$. (Esta particular representação é denominada *representação adjunta*).De fato, a associação de u (e $\hat{u}$) a um operador unitário U é linear e preserva a multiplicação, pois

$$U(\lambda_1)^{-1}U(\lambda_2)^{-1}GU(\lambda_2)U(\lambda_1) = u(\lambda_2)u(\lambda_1)G \tag{56}$$

e

$$U(\lambda_2)U(\lambda_1)GU(\lambda_1)^{-1}U(\lambda_2)^{-1} = G\hat{u}(\lambda_2)\hat{u}(\lambda_1) \tag{57}$$

Como a matriz δ_{ab} está associada ao operador 1, podemos escrever

$$u(\delta\lambda) \quad = \quad 1 + i\sum_a \delta\lambda_a g_a \tag{58}$$

$$\hat{u}(\delta\lambda) = 1 + i\sum_a \delta\lambda_a \hat{g}_a \tag{59}$$

Comop $\hat{u} = (u^t)^{-1}$, segue que

$$1 - i\sum_a \delta\lambda_a \hat{g}_a^t = 1 + i\sum_a \delta\lambda_a g_a \tag{60}$$

ou

$$\hat{g}_a = -g_a^t \tag{61}$$

Se as matrizes u, $\hat{u}$ forem unitárias, $\hat{g}_a = g_a$.

Como se transforma G_b por uma transformação infinitesimal unitária?

$$U(\delta\lambda)^{-1}GU(\delta\lambda) = (1 - i\sum_a \delta\lambda_a G_a)G(1 + i\sum_b \delta\lambda_b G_b) = (1 + i\sum_c \delta\lambda_c g_c)G \tag{62}$$

dando

$$i\delta\lambda_b\,[G, G_b] = i\delta\lambda_b g_b G \tag{63}$$

ou

$$[G, G_b] = g_b G = -G\hat{g}_b \tag{64}$$

Introduzindo a notação

$$(g_b)_{ac} = g_{abc} \tag{65}$$

temos

$$[G_a, G_b] = \sum_c (g_b)_{ac} G_c = \sum_c g_{abc} G_c \tag{66}$$

e daí se vê que

$$g_{abc} = -g_{bac} \tag{67}$$

Note-se que, no caso de $\hat{u} = u$, temos $\hat{g}_a = g_a = -g_a^t$, ou seja, g_a é antissimétrica. Logo, neste caso, adicionalmente,

$$g_{abc} = -g_{cba} \tag{68}$$

e as “constantes de estrutura” são totalmente antissimétricas.

Como decorrência da correspondência (que preserva a multiplicação) entre $U(\lambda)$ e $u(\lambda)$ (e $\hat{u}(\lambda)$), as matrizes g e $\hat{g}$ satisfazem as relações de comutação

$$[g_a, g_b] = \sum_c g_{abc} g_c \tag{69}$$

e

$$[\hat{g}_a, \hat{g}_b] = \sum_c g_{abc} \hat{g}_c \tag{70}$$

De fato, para o caso das $\hat{g}$, temos

$$U_2 U_1 G U_1^{-1} U_2^{-1} - U_1 U_2 G U_2^{-1} U_1^{-1} = G\left(\hat{u}(\lambda_2)\hat{u}(\lambda_1) - \hat{u}(\lambda_1)\hat{u}(\lambda_2)\right) = -\left[G, [G_1, G_2]\right] \tag{71}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\lambda_2)\hat{u}(\lambda_1) - \hat{u}(\lambda_1)\hat{u}(\lambda_2) &= \left(1 + i\sum_a \delta_2\lambda_a \hat{g}_a\right)\left(1 + i\sum_b \delta_1\lambda_b \hat{g}_b\right) \\
&- \left(1 + i\sum_b \delta_1\lambda_b \hat{g}_b\right)\left(1 + i\sum_a \delta_2\lambda_a \hat{g}_a\right) \\
&= -\sum_{a,b} \delta_2\lambda_a \delta_1\lambda_b \hat{g}_a \hat{g}_b + \sum_{a,b} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a \hat{g}_b \hat{g}_a \\
&= +\sum_{a,b} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a \left[\hat{g}_a, \hat{g}_b\right]
\end{aligned} \tag{72}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[G, [G_1, G_2]] &= \left[G, \left[1 + i\sum_b \delta_1\lambda_b G_b, 1 + i\sum_a \delta_2\lambda_a G_a\right]\right] \\
&= \left[G, -\sum_{b,a} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a \left[G_b, G_a\right]\right] \\
&= -\sum_{b,a} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a \left[G, [G_b, G_a]\right] \\
&= -\sum_{b,a} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a \left[G, \sum_c g_{abc} G_c\right] \\
&= \sum_{a,b,c} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a g_{bac} G \hat{g}_c
\end{aligned} \tag{73}$$

Então

$$-G\sum_{a,b} \delta_1\lambda_b \delta_2\lambda_a \left[\hat{g}_a, \hat{g}_b\right] = g_{abc}\hat{g}_c \tag{74}$$

e

$$[\hat{g}_a, \hat{g}_b] = g_{abc}\hat{g}_c \tag{75}$$

Quod erat demonstrandum.
Essas relações, e suas parentes próximas

$$[g_a, g_b] = \sum_c g_{abc} g_c \tag{76}$$

podem ser escritas, por extenso, assim:

$$\sum_d \{g_{abd} g_{dce} + g_{bcd} g_{dae} + g_{cad} g_{dbe}\} = 0 \tag{77}$$

Uma outra forma, abreviada, é

$$[[G_a, G_b], G_c] + [[G_b, G_c], G_a] + [[G_c, G_a], G_b] = 0 \tag{78}$$

que é a identidade de Jacobi.

Vamos introduzir agora um procedimento eficiente para determinar as constantes de estrutura de um grupo unitário definido a partir de suas propriedades geométricas.

Pondo

$$U_{[12]} = 1 + i \sum_a \delta_{[12]} \lambda_a G_a \tag{79}$$

$$U_1 = 1 + i \sum_a \delta_1 \lambda_a G_a \tag{80}$$

$$U_2 = ! + i \sum_a \delta_2 \lambda_a G_a \tag{81}$$

e usando a relação básica

$$U_{[12]} = U_2 U_1 U_2^{-1} U_1^{-1} \tag{82}$$

temos

$$\begin{aligned} 1 + i \sum_c \delta_{[12]} \lambda_c G_c &= (1 + i \sum_b \delta_2 \lambda_b G_b)(1 + i \sum_a \delta_1 \lambda_a G_a) \\ &\times (1 - i \sum_m \delta_2 \lambda_m G_m)(1 - i \sum_n \delta_1 \lambda_n G_n) \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + i^2 \sum_{a,b} \delta_2 \lambda_b G_b \delta_1 \lambda_a G_a - i^2 \sum_{b,n} \delta_2 \lambda_b G_b \delta_1 \lambda_m G_m \\ &- i^2 \sum_{a,m} \delta_1 \lambda_a \delta_2 \lambda_m G_a G_m + i^2 \sum_{m,n} \delta_2 \lambda_m G_m \delta_1 \lambda_n G_n \\ &= 1 - \sum_{b,a} \{\delta_2 \lambda_b \delta_1 \lambda_a (G_b G_a - G_b G_a - G_a G_b + G_b G_a)\} \\ &= 1 + \sum_{b,a} \delta_2 \lambda_b \delta_1 \lambda_a [G_a, G_b] \end{aligned} \tag{84}$$

Assim,

$$i \sum_c \delta_{[12]} \lambda_c G_c = i \sum_{b,a,c} \delta_2 \lambda_b \delta_1 \lambda_a \frac{1}{i} g_{abc} G_c \tag{85}$$

e, finalmente,

$$\delta_{[12]} \lambda_c = \sum_{a,b} \delta_1 \lambda_a \delta_2 \lambda_b (\frac{1}{i}) g_{abc} \tag{86}$$

2 A Relatividade de Galileu

As transfromações infinitesimais de galileu são transformações de coordenadas $\vec{r}, t \mapsto \overline{\vec{r}}, \bar{t}$, tais que:

$$\overline{\vec{r}} = \vec{r} - \delta \vec{r} \tag{87}$$

$$\bar{t} = t - \delta t \tag{88}$$

e

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\epsilon} + \delta \vec{\omega} \times \vec{r} + \delta \vec{v}\, t \ , \tag{89}$$

totalizando 10 parâmetros: 3 vetores ($\delta \vec{\epsilon}$, $\delta \vec{\omega}$ e $\delta \vec{v}$) e um escalar (δt). Vamos comparar as aplicações, nas duas ordens, das transformações

$$1: \ \overline{\vec{r}} = \vec{r} - \delta_1 \vec{r} \ \ , \bar{t} = t - \delta_1 t \tag{90}$$

$$2: \ \overline{\vec{r}} = \vec{r} - \delta_2 \vec{r} \ \ , \bar{t} = t - \delta_2 t \tag{91}$$

ou seja, vamos calcular as seqüências de transfromações 1^{-1},2^{-1},1,2:

$$1^{-1}: \ \overline{\vec{r}} = \vec{r} + \delta_1 \vec{r} \ \ ; \bar{t} = t + \delta_1 t \tag{92}$$

$$2^{-1} \ : \ \overline{\overline{\vec{r}}} = \overline{\vec{r}} + \delta_2 \overline{\vec{r}} \ \ ; \overline{\overline{t}} = \bar{t} + \delta_2 \bar{t} \tag{93}$$

$$\overline{\overline{\vec{r}}} = \vec{r} + \delta_1 \vec{r} + \delta_2 (\vec{r} + \delta_1 \vec{r}) = \vec{r} + \delta_1 \vec{r} + \delta_2 \vec{r} + \delta_2 \delta_1 \vec{r}$$

$$\overline{\overline{t}} = t + \delta_1 t + \delta_2 t + \delta_1 \delta_2 t \tag{94}$$

No que se segue usaremos uma modificação da notação: em lugar de

$$\overline{\overline{\overline{\vec{r}}}}$$

usaremos $\vec{r}^{(3)}$. Assim, $\vec{r}^{(4)}$ aparecerá também em lugar de $\vec{r}$ com quatro tracinhos em cima. O mesmo para t.

$$1 \ : \ \vec{r}^{(3)} = \vec{r}^{(2)} - \delta_1 \vec{r}^{(2)} = \vec{r} + \delta_1 + \delta_2 \vec{r} + \delta_1 \delta_2 \vec{r} - \delta_1 (\vec{r} + \delta_2 \vec{r}) \tag{95}$$

$$\vec{r}^{(3)} = \vec{r} + \delta_2 \vec{r} + \delta_2 \delta_1 \vec{r} - \delta_1 \delta_2 \vec{r}$$

$$t^{(3)} = t^{(2)} - \delta_1 t^{(2)} = t + \delta_1 t + \delta_2 t + \delta_1 \delta_2 t - \delta_1 (t + \delta_2 t) = t + \delta_2 t + \delta_2 \delta_1 t - \delta_1 \delta_2 t$$

$$
\begin{aligned}
2 \quad : \quad & \vec{r}^{(4)} = \vec{r}^{(3)} - \delta_2 \vec{r}^{(3)} = \vec{r} + \delta_2 \vec{r} + \delta_2 \delta_1 \vec{r} - \delta_1 \delta_2 \vec{r} - \delta_2 \vec{r} && (96)\\
& \vec{r}^{(4)} = \vec{r} + \delta_2 \delta_1 \vec{r} - \delta_1 \delta_2 \vec{r} \\
& t^{(4)} = t^{(3)} - \delta_2 t^{(3)} = t + \delta_2 t + \delta_2 \delta_1 t - \delta_1 \delta_2 t - \delta_2 t && (97)\\
& t^{(4)} = t + \delta_2 \delta_1 t - \delta_1 \delta_2 t
\end{aligned}
$$

Definindo

$$\delta_{[12]} = \delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2 \tag{98}$$

temos

$$\delta_{[12]} \vec{r} = \delta_{[12]} \vec{\epsilon} + (\delta_{[12]} \vec{\omega}) \times \vec{r} + (\delta_{[12]} \vec{v}) t \tag{99}$$

Como

$$
\begin{aligned}
\delta_1 \vec{r} &= \delta_1 \vec{\epsilon} + \delta_1 \vec{\omega} \ \times \vec{r} + \delta_1 \vec{v}\, t && (100)\\
\delta_2 \vec{r} &= \delta_2 \vec{\epsilon} + \delta_2 \vec{\omega} \ \times \vec{r} + \delta_2 \vec{v}\, t && (101)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2 (\delta_1 \vec{r} &= \delta_2 \delta_1 \vec{\epsilon} + \delta_1 \vec{\omega} \ \times \delta_2 \vec{r} + \delta_1 \vec{v} \delta_2 t && (102)\\
\delta_2 (\delta_1 \vec{r}) &= \delta_1 \vec{\omega} \times (\delta_2 \vec{\epsilon} + \delta_2 \vec{\omega} \ \times \vec{r} + \delta_2 \vec{v}\, t) + \delta_1 \vec{v} \delta_2 t \\
\delta_2 (\delta_1 \vec{r}) &= \delta_1 \vec{\omega} \times \delta_2 \vec{\epsilon} + \delta_1 \vec{\omega} \times (\delta_2 \vec{\omega} \times \vec{r}) + \delta_1 \vec{\omega} \times \delta_2 \vec{v}\, t + \delta_1 \vec{v} \delta_2 t \\
\delta_1 (\delta_2 \vec{r}) &= \delta_2 \vec{\omega} \times \delta_1 \vec{\epsilon} + \delta_2 \vec{\omega} \times (\delta_1 \vec{\omega} \times \vec{r}) + \delta_2 \vec{\omega} \times \delta_1 \vec{v} t + \delta_2 \vec{v} \delta_1 t
\end{aligned}
$$

o que dá, finalmente,

$$\delta_{[12]} \vec{\epsilon} = \delta_1 \vec{\omega} \times \delta_2 \vec{\epsilon} - \delta_2 \vec{\omega} \times \delta_1 \vec{\epsilon} + \delta_1 \vec{v} \delta_2 t - \delta_2 \vec{v} \delta_1 t \tag{103}$$

$$\delta_{[12]} \vec{\omega} = \delta_1 \vec{\omega} \times \delta_2 \vec{\omega} \tag{104}$$

$$\delta_{[12]} \vec{v} = \delta_1 \vec{\omega} \times \delta_2 \vec{v} - \delta_2 \vec{\omega} \times \delta_1 \vec{v} \tag{105}$$

A transformação unitária infinitesimal que age sobre os estados,

$$U = 1 + iG$$

é dada por

$$G = \left[\delta \vec{\epsilon}.\vec{P} + \delta \vec{\omega}.\vec{J} + \delta \vec{v}.\vec{N} - \delta t\ H \right] + \delta \phi \vec{1} \tag{106}$$

Os geradores $\vec{P}$ e $\vec{J}$ são denominados momento linear e momento angular; H é o operador hamiltomiano; os geradores de variações infinitesimais de velocidades serão chamados de “boosts”.

A determinação das constantes de estrutura,e, portanto, das relações de comutação, segue a estratégia que vamos expor agora.

Pondo

$$
\begin{aligned}
G_{[12]} &= \delta_{[12]} \lambda_c G_c && (107)\\
G_1 &= \delta_1 \lambda_a G_a && (108)\\
G_2 &= \delta_2 \lambda_b G_b && (109)
\end{aligned}
$$

e, lembrando que

$$G_{[12]} = \frac{1}{i}\left[G_1, G_2\right] \tag{110}$$

obtém-se:

$$[\delta_1 \lambda_a G_a, \delta_2 \lambda_b G_b] = i\delta_{[12]}\lambda_c G_c \tag{111}$$

Mas o segundo membro é

$$i\left(\delta_{[12]}\epsilon_k P_k + \delta_{[12]}\omega_k J_k + \delta_{[12]}v_k N_k - \delta_{[12]}tH\right) \tag{112}$$

de maneira que, comparando os dois membros, deduzem-se as relações de comutação.
Exemplo:

$$\begin{aligned} [\delta_1\omega_i J_i, \delta_2\omega_j J_j] &= i\delta_{[12]}\omega_k J_k & (113)\\ &= i\epsilon_{klm}\delta_1\omega_l\delta_2\omega_m J_k & (114)\\ &= i\epsilon_{kij}J_k\delta_1\omega_i\delta_2\omega_j & (115)\\ [J_i, J_j] &= i\epsilon_{kij}J_k & (116) \end{aligned}$$

Não sabemos ainda como determinar $\delta_{[12]}\phi$, por não existir transformação clássica correspondente. Na seção seguinte mostraremos como determiná-la. O resultado que se obtém é:

$$\delta_{[12]}\phi = M(\delta_1\vec{\epsilon}.\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\epsilon}.\delta_1\vec{v}) \ . \tag{117}$$

Com isto, todas as relações de comutação podem ser escritas. Elas são:

$$\begin{aligned} [J_k, J_l] &= i\epsilon_{klm}J_m & (118)\\ [P_k, J_l] &= i\epsilon_{klm}P_m & (119)\\ [N_k, N_l] &= 0 & (120)\\ [P_k, H] &= 0 & (121)\\ [N_k, J_l] &= i\epsilon_{klm}N_m & (122)\\ [P_k, P_l] &= 0 & (123)\\ [P_k, N_l] &= i\delta_{kl}M & (124)\\ [J_k, H] &= 0 & (125)\\ [N_k, H] &= -iP_k & (126) \end{aligned}$$

Note que

$$G_{[12]} = \frac{1}{i}[G_1, G_2] = \delta_2 G_1 = -\delta_1 G_2 \tag{127}$$

pois

$$\delta_2 G_1 = U_2 G_1 U_2^{-1} - G_1 = (1 + iG_2)G_1(1 - iG_2) - G_1 \tag{128}$$

$$\delta_2 G_1 = \frac{1}{i}[G_1, G_2] \tag{129}$$

Usando esta notação, podemos escrever

$$\begin{aligned}\delta_\omega \vec{J} &= (1 + i\delta\vec{\omega}.\vec{J})\vec{J}(1 - i\delta\vec{\omega}) - \vec{J} &(130)\\ \delta_\omega \vec{J} &= \frac{1}{i}\left[\vec{J}, \vec{J}.\delta\vec{\omega}\right] &(131)\end{aligned}$$

e, da mesma forma,

$$\delta_\omega \vec{P} = \frac{1}{i}[\vec{P}, \vec{J}.\delta\vec{\omega}] = \delta\vec{\omega} \times \vec{P} \tag{132}$$

$$\delta_\omega \vec{N} = \frac{1}{i}[\vec{N}, \vec{J}.\delta\vec{\omega}] = \delta\vec{\omega} \times \vec{N} \tag{133}$$

que revelam a resposta de um vetor a rotações infinitesimais, e

$$\delta_\omega H = \frac{1}{i}[H, \vec{J}.\delta\vec{\omega}] = 0 \tag{134}$$

que caracteriza H como um escalar sob rotações.

Analogamente, as respostas a translações infinitesimais são

$$\delta_\epsilon \vec{J} = \frac{1}{i}[\vec{J}, \vec{P}.\delta_\epsilon] = \delta_\epsilon \times \vec{P} \tag{135}$$

$$\delta_\epsilon = \frac{1}{i}[\vec{P}, \vec{P}.\delta_\epsilon] = 0 \tag{136}$$

$$\delta_\epsilon \vec{N} = \frac{1}{i}[\vec{N}, \vec{P}.\delta_\epsilon] = -M\delta\vec{\epsilon} \tag{137}$$

$$\delta_\epsilon H = \frac{1}{i}[H, \vec{P}.\delta\vec{\epsilon}] = 0 \tag{138}$$

A equação

$$\frac{1}{i}[\vec{J}, \vec{P}.\delta\vec{\epsilon}] = \delta\vec{\epsilon} \times \vec{P} \tag{139}$$

admite a solução

$$\vec{J} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{S} \tag{140}$$

com

$$[R_k, P_l] = i\delta_{kl} \tag{141}$$

e

$$[S_i, P_k] = [S_i, R_k] = 0 \tag{142}$$

Para que se mantenham válidas $[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikl}J_l$, é necessário ainda que

$$[S_i, S_k] = i\epsilon_{ikl}S_l \tag{143}$$

que podem ser escritas assim:

$$\vec{S} \times \vec{S} = i\vec{S} \tag{144}$$

Finalmente, da resposta de $\vec{N}$ a translações e rtotações, obtém-se

$$\vec{N} = \vec{P}t - M\vec{R} \tag{145}$$

Resumindo,

$$\vec{J} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{S} \quad (146)$$
$$\vec{N} = \vec{P}t - M\vec{R} \quad (147)$$
$$[R_i, P_k] = i\delta_{ik} \quad (148)$$
$$[S_i, S_K] = i\epsilon_{ikl}S_l \quad (149)$$
$$[R_i, S_l] = [P_i, S_l] = 0 \quad (150)$$

satisfazem automaticamente todas as relações de comutação.
Teorema: os geradores das transformações de relatividade são constantes do movimento.

Segue diretamente da álgebra.
(i)$\vec{R}$, $\vec{P}$, $\vec{S}$ não dependem explicitamente do tempo. Então, por exemplo, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{i}[\vec{P}, H] = 0$.
(ii)$\vec{N} = \vec{P}t - M\vec{R}$ depende explicitamente do tempo. Então,

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} + \frac{1}{i}[\vec{N}, H] = \vec{P} - \vec{P} = 0 \quad (151)$$

Seja $|\ \rangle$ um estado em repouso em relação ao sistema inercial S; seja U omoperador de transformação infinitesimal "de relatividade". Então U $;\rangle$ é um estado, e, na verdade, pode ser considerado como o mesmo estado, visto de um novo sistema de referência S', obtido do primeiro por uma transformação de relatividade que corresponde a uma escolha fixa dos parâmetros. A relação entre s' e S (em termos de parâmetros) não depende do tempo. Por isso os geradores não podem depender do tempo.

2.1 A questão do termo $\delta\phi\vec{1}$ na expressão para G

Uma transformação que altera a fase de todos os estados por um mesmo valor, é equivalente à identidade, na mecânica quântica. Então, quando a ordem em que duas transformações são aplicadas é irrelevante, não segue necessariamente que o comutador é zero: ele pode ser da forma $\delta\phi\vec{1}$ (que inclui zero como um caso particular).

A determinação de $\delta_{[12]}\phi$ não pode se basear em considerações geométricas, que são clássicas. Temos que determiná-la exigindo a consistência do formalismo.

A expressão mais geral para $\delta_{[12]}\phi = -\delta_{[21]}\phi$ é

$$\begin{aligned} \phi &= K(\delta_1\vec{\omega}.\delta_2\vec{\epsilon} - \delta_2\vec{\omega}.\delta_1\vec{\epsilon}) \quad (152) \\ &+ L(\delta_1\vec{\omega}.\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\omega}.\delta_1\vec{v}) \\ &+ M(\delta_1\vec{\epsilon}.\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\epsilon}.\delta_1\vec{v}) \end{aligned}$$

onde K, L e M são constantes. Considere a identidade de Jacobi

$$[[G_1, G_2], g_3] + [[G_3, G_1], G_2] + [[G_2, G_3], G_1] = 0 \quad (153)$$

que pode ser escrita

$$G_{[[123]} + G_{[[31]2]} + G_{[[23]1]} = 0 \tag{154}$$

e, como

$$G_{[12]} = \delta_{[12]}\lambda_a G_a \tag{155}$$

temos

$$\delta_{[[12]3]}\lambda_a + \delta_{[[31]2]}\lambda_a + \delta_{[[23]1]}\lambda_a = 0 \tag{156}$$

para cada a, e, em particular, para $\lambda_a = \phi$. Usando então a expresão para $\delta_{[12]}\phi$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= K\left[\delta_{[12]}\vec{\omega}.\delta_3\vec{\epsilon} - \delta_3\vec{\omega}.\delta_{[12]}\vec{\epsilon} + \ \ perm.\ \ cicl.\right] \\ &+ L\left[\delta_{[12}\vec{\omega}.\delta_3\vec{v} - \delta_3\vec{\omega}.\delta_{[12]}\vec{v} + \ \ perm.\ \ cicl.\right] \\ &+ M\left[\delta_{[12]}\vec{\epsilon}.\delta_3\vec{v} - \delta_3\vec{\epsilon}.\delta_{[12]}\vec{v} + \ \ perm.\ \ cicl.\right] \end{aligned} \tag{157}$$

Um cálculo explícito mostra que o coeficiente de M é zero, enquanto que os de K e L não são identicamente nulos. Logo, a identidade de Jacobi força K e L a serem nulos, permitindo, porém, que $M \neq 0$. Logo,

$$\delta_{[12]}\phi = M\left(\delta_1\vec{\epsilon}.\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\epsilon}.\delta_1\vec{v}\right) \tag{158}$$

3 A Relatividade de Einstein

As transformações de Lorentz são transformações lineares homogêneas que mantêm invariante aforma quadrática $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$. Escrevendo

$$\overline{x}^\mu = x^\mu - \delta\omega^{\mu\nu}x_\nu \tag{159}$$

a condição de invariância impõe que $\delta\omega_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0$, ou seja,

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \tag{160}$$

Conclusão: as transformações infinitesimais de Lorentz são transformações do tipo

$$\overline{x}^\mu = x^\mu - \delta\omega^\mu_{\ \nu}x^\nu \tag{161}$$

com $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$.

As transformações de Poincaré são as transformações de Lorenyz e mais quatro translações, ou seja:

$$\overline{x}^\mu = x^\mu - \delta\omega^\mu_\nu x^\nu - \delta\epsilon^\mu \equiv x^\mu - \delta x^\mu \tag{162}$$

e formam um grupo de 10 parâmetros. A relação com os parâmetros do grupo de Galileu vem através de

$$\delta\omega_{kl} = \epsilon_{klm}\delta\omega_m \tag{163}$$

$$\delta\omega_{0k} = \frac{\delta v_k}{c} \tag{164}$$

A composição de parâmetros é obtida lembrando que

$$\delta_{[12]}x^\mu = \delta_2\delta_1 x^\mu - \delta_1\delta_2 x^\mu \tag{165}$$

Mas

$$\delta_1 x^\mu = \delta_1\omega^{\mu\nu}x_\nu + \delta_1\epsilon^\mu \tag{166}$$

$$\begin{aligned} \delta_2\delta_1 x^\mu &= \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2 x_\nu + \delta_2\delta_1\epsilon^\mu \\ &= \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\omega_{\nu\lambda}x^\lambda + \delta_1\omega_{\nu\lambda}x^\lambda + \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\epsilon_\nu + \delta_2\delta_1\epsilon^\mu \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \delta_{[12]}x^\mu &= \left(\delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\omega_{\nu\lambda} - \delta_2\omega^{\mu\nu}\delta_1\omega_{\mu\nu}\right)x^\lambda \\ &+ \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\epsilon_\nu - \delta_2\omega^{\mu\nu}\delta_1\epsilon_\nu \end{aligned} \tag{167}$$

de modo que

$$\delta_{[12]}\omega^\mu_\lambda = \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\omega_{\nu\lambda} - \delta_2\omega^{\mu\nu}\delta_1\omega_{\nu\lambda} \tag{168}$$

$$\delta_{[12]}\epsilon^\mu = \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\epsilon_\nu - \delta_2\omega^{\mu\nu}\delta_1\epsilon_\nu \tag{169}$$

Os comutadores da álgebra de Lie podem ser calculados agora da forma usual, pondo-se

$$\delta_{[12]}\lambda_a G_a = \frac{1}{i}[\delta_1\lambda_b G_b, \delta_2\lambda_c G_c] \tag{170}$$

e

$$G = P^\mu\delta\epsilon_\mu + \frac{1}{2}J^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu} + \delta\phi\vec{1} \tag{171}$$

Contudo, $\delta_{[12]}\phi$ neste caso é zero, porque é impossível construir uma forma bilinear antissimétrica ($\delta_{[12]}\phi = -\delta_{[21]}\phi$) com $\delta_{1,2}\epsilon^\mu$ e $\delta_{1,2}\omega^{\mu\nu}$ que seja um escalar. Então,

$$\begin{aligned} P^\mu\delta_{[12]}\epsilon_\mu + \frac{1}{2}J^{\mu\nu}\delta_{[12]}\omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{i}\delta_1\epsilon_\lambda\delta_2\epsilon_\omega[P^\lambda, P^\omega] + \frac{1}{i}\delta_1\epsilon_\lambda\delta_2\omega_{\alpha\beta}\frac{1}{2}[P^\lambda, J^{\alpha,\beta}] \\ &+ \frac{1}{i}\delta_1\omega_{\alpha\beta}\delta_2\epsilon_\lambda[J^{\alpha\beta}, P^\lambda]\frac{1}{2} + \frac{1}{i}\frac{1}{4}\delta_1\omega_{\alpha\beta}\delta_2\omega_{\lambda\gamma}[J^{\alpha\beta}, J^{\lambda\gamma}] \end{aligned} \tag{172}$$

Daí se tira imediatamente que

$$[P^\lambda, P^\omega] = 0\ . \tag{173}$$

Comparando os termos que contêm produtos $\delta\omega\ \delta\epsilon$, vê-se que

$$\begin{aligned} P^\mu\left(\delta_1\omega_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}\delta_2\epsilon_\lambda - \delta_2\omega_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}\delta_1\epsilon_\lambda\right) &= \\ \frac{1}{i}\delta_1\epsilon_\lambda\delta_2\omega_{\mu\nu}\frac{1}{2}[P^\lambda, J^{\mu\nu}] - \frac{1}{i}\delta_2\epsilon_\lambda\delta_1\omega_{\mu\nu}[P^\lambda, J^{\mu\nu}] \end{aligned} \tag{174}$$

e

$$\begin{aligned} P^\mu g^{\nu\lambda}\delta_1\omega_{\mu\nu}\delta_2\epsilon_\lambda - P^\mu g^{\nu\lambda}\delta_1\epsilon_\lambda\delta_2\omega_{\mu\nu} &= \\ \frac{1}{2i}(\delta_1\epsilon_\lambda\delta_2\omega_{\mu\nu} - \delta_2\epsilon_\lambda\delta_1\omega_{\mu\nu})[P^\lambda, J^{\mu\nu}] \end{aligned} \tag{175}$$

Antissimetrizando o primeiro termo em relação a (μ, ν), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(P^\mu G^{\nu\lambda} - P^\nu g^{\mu\lambda})\delta_1\omega_{\mu\nu}\delta_2\epsilon_\lambda - \frac{1}{2}(P^\mu g^{\nu\lambda} - P^\nu g^{\mu\lambda})\delta_2\omega_{\mu\nu}\delta_1\epsilon_\lambda &= \\ \frac{1}{2i}(\delta_1\epsilon_\lambda\delta_2\omega_{\mu\nu} - \delta_2\epsilon_\lambda\delta_1\omega_{\mu\nu})[P^\lambda, J^{\mu\nu}] & \end{aligned} \tag{176}$$

de onde se tira, finalmente,

$$\frac{1}{i}[P^\lambda, J^{\mu\nu}] = P^\nu g^{\mu\lambda} - P^\mu g^{\nu\lambda} \tag{177}$$

Casos importantes são:

$$\left[P^0, P^\nu\right] = 0 \tag{178}$$

$$i\left[P^0, J^{ik}\right] = 0 \tag{179}$$

De maneira análoga se obtém

$$\frac{1}{i}\left[J_{\mu\nu}, J_{\kappa\lambda}\right] = g_{\mu\kappa}J_{\nu\lambda} - g_{\nu\kappa}J_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\kappa} \tag{180}$$