Reflexão e refração da luz

Henrique Fleming

11 May 2001

1 Teoria de Maxwell

1.1 As equações

A descoberta, por Maxwell, de que a luz é uma onda eletromagnética, foi uma das mais importantes de toda a história da ciência. Neste capítulo veremos como, dentro da teoria de Maxwell, se descreve a reflexão e a refração da luz na passagem de um meio para outro, separados por um plano. Trata-se de um problema clássico, cuja solução era conhecida séculos antes de Maxwell. A teoria de Maxwell, ao reobter esses resultados, os enriquecerá, fornecendo uma descrição das intensidades com que os fenômenos em questão ocorrem, bem como importantes conseqüências, para eles, do caráter vetorial das ondas eletromagnéticas, ou seja, da polarização da luz. No tratamento clássico da refração, por exemplo, determina-se a direção do raio refratado (pela lei de Snell-Descartes), mas não se dá nenhuma informação sobre a intensidade da luz refratada em relação à intensidade da luz incidente.

As equações de Maxwell num meio simples, cujas propriedades eletromagnéticas podem ser sintetizadas nas constantes ϵ e μ, são:

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = 4\pi\rho \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{4}$$

onde ρ e $\vec{j}$ são, respectivamente, as densidades de carga "verdadeira", isto é, cargas que não são de polarização, e correntes "verdadeiras", ou seja, que transportam cargas macroscopicamente (excluíndo-se, portanto, correntes eletrônicas, por exemplo). Das equações de Maxwell se obtêm equações de onda. Tomando o *rot* da Eq.(3), tem-se:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{H}}{\partial t} \\
&= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})
\end{aligned}$$

Suponhamos que ϵ e μ sejam constantes, e que $\vec{j} = 0$. Temos então, como $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E}$ e $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$,

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} \tag{5}$$

ou, usando $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$,

$$\vec{\nabla}^2\vec{D} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

que mostra que se tem uma onda com velocidade de propagação dada por

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \ . \tag{7}$$

Um cálculo análogo para o campo magnético leva a

$$\vec{\nabla}^2\vec{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Nos meios transparentes, que são os que nos interessam neste capítulo, tem-se, em geral, $\mu \approx 1$. Por causa disso omitiremos μ das nossas fórmulas, a seguir.

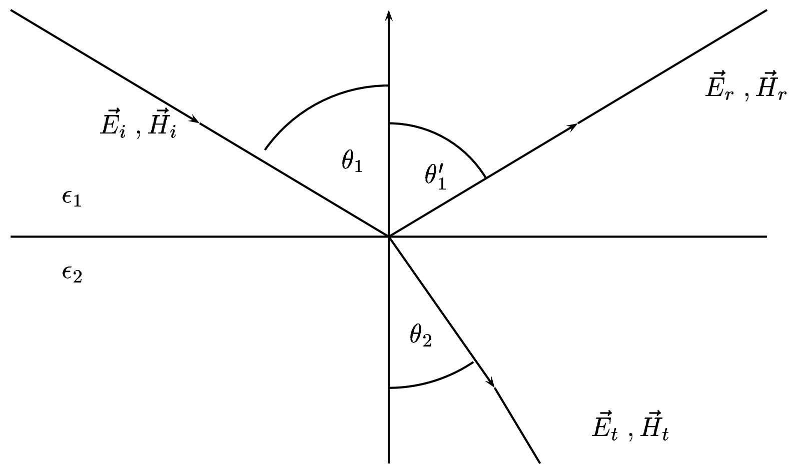
1.2 As soluções

As soluções das equações para $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são

$$\vec{E} = \frac{a}{\sqrt{\epsilon}}\vec{e}\, e^{i\omega(\sqrt{\epsilon}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{c} - t)} \tag{9}$$

$$\vec{H} = a\vec{h}\, e^{i\omega(\sqrt{\epsilon}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{c} - t)} \tag{10}$$

onde a é uma constante (amplitude da onda) e os vetores $\vec{e}$ e $\vec{h}$ são os vetores (unitários) de polarização dos campos elétrico e magnético, respectivamente, e estão definidos na figura. O vetor $\vec{p}$ é um vetor unitário na direção e sentido da propagação da onda. $\vec{p}$, $\vec{e}$ e $\vec{h}$, nessa ordem, formam um triedro dextrógiro.



As soluções apresentadas acima são ondas planas e monocromáticas que se propagam na matéria. Os campos incidentes são:

$$\vec{E}_i = \frac{a_1 \vec{e}_1}{\sqrt{\epsilon_1}} e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_1}\frac{\vec{p}_1 . \vec{r}}{c} - t)} \tag{11}$$

$$\vec{H}_i = a_1 \vec{h}_1 e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_1}\frac{\vec{p}_1 . \vec{r}}{c} - t)} \tag{12}$$

Os campos refletidos são

$$\vec{E}_r = \frac{a'_1 \vec{e'}_1}{\sqrt{\epsilon_1}} e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_1}\frac{\vec{p}'_1 . \vec{r}}{c} - t)} \tag{13}$$

$$\vec{H}_r = a'_1 \vec{h'}_1 e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_1}\frac{\vec{p}'_1 . \vec{r}}{c} - t)} \tag{14}$$

e, finalmente, os refratados são

$$\vec{E}_t = \frac{a_2 \vec{e}_2}{\sqrt{\epsilon_2}} e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_2}\frac{\vec{p}_2 . \vec{r}}{c} - t)} \tag{15}$$

$$\vec{H}_t = a_2 \vec{h}_2 e^{i\omega(\frac{\sqrt{\epsilon_2}}{c}\vec{p}_2 . \vec{r} - t)} \tag{16}$$

Temos aí soluções para o meio 1 e soluções para o meio 2. A conexão entre elas é feita através das fórmulas bem conhecidas do eletromagnetismo,

$$\vec{n}.(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \tag{17}$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \tag{18}$$

$$\vec{n}.(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \tag{19}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \, , \tag{20}$$

que devem ser satisfeitas nos pontos da superfície de separação dos meios. No meios 1 e 2, os campos elétricos totais são:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r \tag{21}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t \tag{22}$$

2 Refração

2.1 Direção da propagação

Como conseqüência da Eq.(17), temos

$$\begin{aligned}\vec{n}.(a_1\sqrt{\epsilon_1}\vec{e}_1 e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_1}\frac{\vec{p}_1.\vec{r}}{c}-t)} &+ a_1'\sqrt{\epsilon_1}\vec{e}_1' e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_1}\frac{\vec{p}_1'.\vec{r}}{c}-t)} \\ &- a_2\sqrt{\epsilon_2}\vec{e}_2 e^{i\omega(\sqrt{\epsilon_2}\frac{\vec{p}_2.\vec{r}}{c}-t)}) = 0\end{aligned} \tag{23}$$

Esta relação, envolvendo exponenciais, que formam um conjunto completo, só admite soluções de dois tipos: ou os coeficientes de cada exponencial se anulam, ou temos

$$e^{i\omega(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1.\vec{r}-t)} = e^{i\omega(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1'.\vec{r}-t)} = e^{i\omega(\frac{\sqrt{\epsilon_2}}{c}\vec{p}_2.\vec{r}-t)} \tag{24}$$

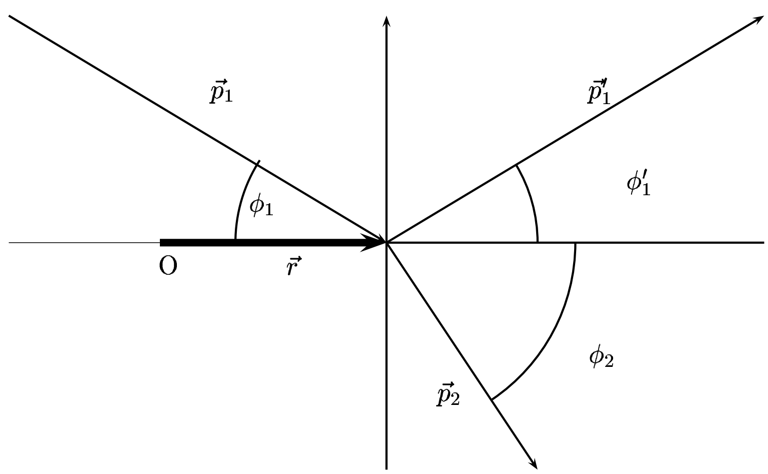
e, neste caso,

$$\vec{n}.(a_1\sqrt{\epsilon_1}\vec{e}_1 + a_1'\sqrt{\epsilon_1}\vec{e}_1' - a_2\sqrt{\epsilon_2}\vec{e}_2) = 0 \tag{25}$$

Da Eq.(24) segue que

$$\vec{p}_1.\vec{r} = \vec{p}_1\,'.\vec{r} \tag{26}$$

$$\sqrt{\epsilon_1}\vec{p}_1.\vec{r} = \sqrt{\epsilon_2}\vec{p}_2.\vec{r} \tag{27}$$



Usando a notação descrita na figura acima, temos

$$\vec{p}_1.\vec{r} = r\cos\phi_1$$

$$\vec{p}_1\,'.\vec{r} = r\cos\phi_1'$$

ou $\cos\phi_1 = \cos\phi_1'$, ou ainda, $\phi_1 = \phi_1'$ e, finalmente,

$$\theta_1 = \theta_1' \tag{28}$$

que é a lei fundamental da reflexão.

Da segunda relação segue que

$$\sqrt{\epsilon_1}\cos\phi_1 = \sqrt{\epsilon_2}\cos\phi_2$$

ou,

$$\sqrt{\epsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\epsilon_2}\sin\theta_2 \tag{29}$$

que é a lei de Snell-Descartes da refração, acrescida da informação de que, se n_i é o índice de refração do meio i, então

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \tag{30}$$

2.2 Intensidades

As leis clássicas da refração e reflexão nada dizem sobre quanto da luz é refletida, e quanto é refratada. Na seqüência de nosso programa de descrever esses fenômenos a partir da teoria de Maxwell da luz, vamos obter agora expressões para as intensidades relativas da luz refletida e da refratada.

Uma vez satisfeitas as condições dadas pela Eq.(24), que nos levaram às leis de Snell-Descartes, resta-nos explorar as relações da Eq.(25). São elas que nos informarão sobre as intensidades mencionadas acima.[1] As equações à nossa disposição são

$$\vec{n}.(a_1\sqrt{\epsilon_1}\vec{e_1} + a_1'\sqrt{\epsilon_1}\vec{e_1}' - a_2\sqrt{\epsilon_2}\vec{e_2}) = 0 \tag{31}$$

$$\vec{n} \times (a_1\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\vec{e_1} + a_1'\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\vec{e_1}' - a_2\frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}}\vec{e_2}) = 0 \tag{32}$$

$$\vec{n}.(a_1\vec{h_1} + a_1'\vec{h_1}' - a_2\vec{h_2}) = 0 \tag{33}$$

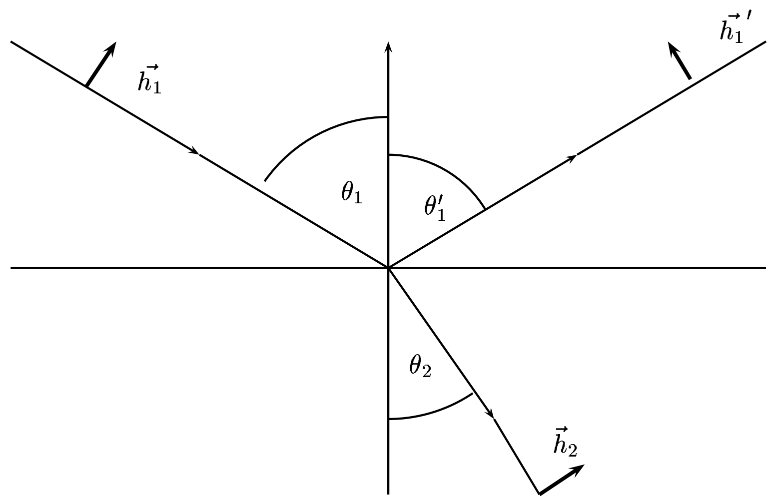
$$\vec{n} \times (a_1\vec{h_1} + a_1'\vec{h_1}' - a_2\vec{h_2}) = 0 \tag{34}$$

Para obter resultados inteligíveis, vamos estudar dois casos particulares: o caso em que o campo elétrico oscila mantendo-se perpendicular ao plano de incidência (aqui é o plano da folha), e o caso em que o campo elétrico oscila paralelamente ao plano de incidência. Como se sabe, qualquer estado de polarização da luz pode ser obtido por combinação linear desses dois casos particulares.

[1] Note que, enquanto as leis de Snell-Descartes são conhecidas há muitos séculos, essas leis da intensidade só puderam ser deduzidas no fim do século 19, embora um resultado um pouco mais fraco tivesse sido obtido por Fresnel no começo daquele século.

2.2.1 Campo elétrico perpendicular

Neste caso o campo magnético é paralelo ao plano de incidência, e os vetores de polarização pertinentes são mostrados na figura abaixo.



A terceira condição de contorno dá

$$a_1 \sin\theta_1 + a_1' \sin\theta_1 - a_2 \sin\theta_2 = 0 \tag{35}$$

enquanto que da quarta se tira

$$a_1 \cos\theta_1 - a_1' \cos\theta_1 - a_2 \cos\theta_2 = 0 \tag{36}$$

Multiplicando a Eq.(35) por $\cos\theta_1$, a Eq.(36) por $\sin\theta_1$ e somando as equações resultantes, temos

$$a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 2\ \sin 2\theta_1 a_1 \tag{37}$$

de onde sai que

$$a_2 = \frac{\sin 2\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} a_1 \tag{38}$$

Multiplicando a Eq.(35) por $\cos\theta_2$, a Eq.(36) por $\sin\theta_2$ e subtraíndo a segunda equação assim obtida da primeira, temos

$$a_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -a_1' \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

ou

$$a_1' = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} a_1 \tag{39}$$

A Eq.(38) dá a amplitude da onda transmitida; a Eq.(39) dá a amplitude da onda refletida.

Passemos ao cálculo das intensidades. Na teoria de Maxwell isto significa determinar o vetor de Poynting $\vec{S}$. A intensidade do campo incidente é

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi}\vec{E}_i \times \vec{H}_i \\
&= \frac{c}{4\pi}\left(\frac{a_1}{\sqrt{\epsilon_1}}\vec{e}_1 \cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1.\vec{r} - t\right)\right] \times a_1 \vec{h}_1 \cos\left[\ldots\right]\right) \\
&= \frac{a_1^2 c}{4\pi\sqrt{\epsilon_1}} \cos^2\left[\omega\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1.\vec{r} - t\right)\right]\vec{e}_1 \times \vec{h}_1 \\
&= \frac{a_1^2 c}{4\pi\sqrt{\epsilon_1}} \cos^2\left[\omega\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1.\vec{r} - t\right)\right]\vec{p}_1
\end{aligned}$$

A intensidade propriamente dita é o fluxo de $\vec{S}.\vec{n}$, sendo $\vec{n}$ a normal à superfície em questão. Então, por unidade de área,

$$\vec{S}.\vec{n} = \frac{a_1^2 c}{4\pi\sqrt{\epsilon_1}} \cos^2\left[\omega\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1.\vec{r} - t\right)\right]\vec{p}_1.\vec{n} \tag{40}$$

É raro que se queira saber a intensidade com tantos detalhes. Em geral é suficiente, e mais útil, calcular a *média por período* da intensidade, o que é dado por

$$< \vec{S}.\vec{n} > = \frac{1}{T}\int_0^T dt \vec{S}.\vec{n}$$

que, no caso da onda incidente, é

$$< \vec{S}.\vec{n} > = \frac{a_1^2 c}{4\pi\sqrt{\epsilon_1}}(\vec{p}_1.\vec{n})\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left[\omega\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{c}\vec{p}_1.\vec{r} - t\right)\right]dt \tag{41}$$

O cálculo dessa integral é elementar. O resultado é o seguinte:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left[\omega(A - t)\right]dt = \frac{1}{2} \tag{42}$$

onde A é qualquer constante e $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pondo $\vec{p}_1.\vec{n} = \cos\theta_1$ temos então

$$< \vec{S}.\vec{n} >_T^i = \frac{a_1^2 c}{8\pi\sqrt{\epsilon_1}}\cos\theta_1 \tag{43}$$

Para a intensidade refletida um cálculo análogo dá:

$$< \vec{S}.\vec{n} >_T^r = \frac{a_1'^2 c}{8\pi\sqrt{\epsilon_1}}\cos\theta_1 \tag{44}$$

Para a intensidade transmitida,

$$< \vec{S}.\vec{n} >_T^t = \frac{a_2^2 c}{8\pi\sqrt{\epsilon_2}}\cos\theta_2 \tag{45}$$

Estamos agora em condições de definir a *reflexividade* $R_\perp$ e a *transmissividade* $T_\perp$ dessa ondas:

$$R_\perp = \frac{fluxo\ de\ energia\ da\ onda\ refletida}{idem\ da\ incidente} \tag{46}$$

$$T_\perp = \frac{fluxo\ de\ energia\ da\ onda\ transmitida}{idem\ da\ incidente} \tag{47}$$

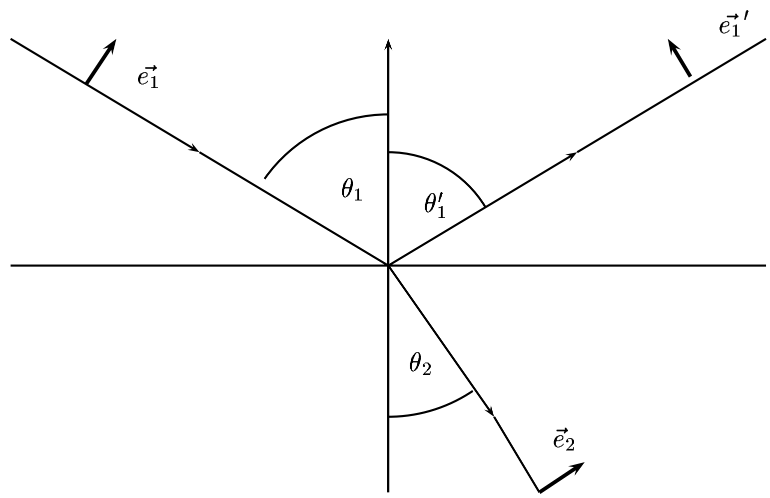
Uma simples substituição dá:

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \tag{48}$$

$$T_\perp = \frac{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \tag{49}$$

2.2.2 Campo elétrico paralelo

Quando o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência, o campo magnético é perpendicular. Os vetores de polarização relevantes são mostrados na figura abaixo.



Neste caso as condições de contorno se escrevem

$$\vec{n}.(a_1\sqrt{\epsilon_1}\vec{e}_1 + a_1'\sqrt{\epsilon_1}\vec{e}_1' - a_2\sqrt{\epsilon_2}\vec{e}_2) = 0 \tag{50}$$

$$\vec{n}\times(a_1\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\vec{e_1} + a_1'\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\vec{e}_1' - a_2\frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}}\vec{e_2}) = 0 \tag{51}$$

de onde sai (veja a figura)

$$a_1\sqrt{\epsilon_1}\sin\theta_1 + a_1'\sqrt{\epsilon_1}\sin\theta_1 - a_2\sqrt{\epsilon_2}\sin\theta_2 = 0 \tag{52}$$

$$a_1\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\cos\theta_1 - a_1'\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\cos\theta_1 - a_2\frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}}\cos\theta_2 = 0 \tag{53}$$

Multiplicando a Eq.(52)por $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}\cos\theta_1$ e somando à Eq.(53) multiplicada por $\sqrt{\epsilon_1}\sin\theta_1$, obtém-se

$$a_2 = \frac{\sin 2\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}a_1 \tag{54}$$

e depois, sem dificuldade,

$$a_1' = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}a_1 \tag{55}$$

Podemos agora calcular $R_\|$ e $T_\|$.

$$R_\| = \frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)} \tag{56}$$

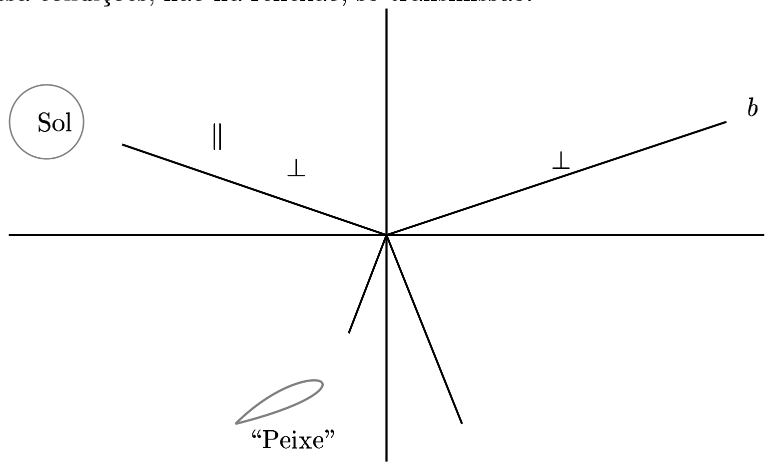
$$T_\| = \frac{\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)} \tag{57}$$

que são conhecidas como as fórmulas de Fresnel.

2.3 Aplicações

2.3.1 Ângulo de Brewster

Tomando-se $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ tem-se que $R_{\parallel} = 0$ e $T_{\parallel} = 1$, o que quer dizer que, nessa condições, não há reflexão, só transmissão.



Como a luz natural é uma mistura em partes iguais das polarizações $\parallel$ e $\perp$, quem olhar para a superfície da água no ângulo certo (ângulo de Brewster), receberá luz polarizada, já que a componente de polarização paralela não é refletida. Esta *polarização por reflexão* foi descoberta por Malus. Então, olhando-se para a superfície da água nesse ângulo, e usando-se um polaroide para eliminar a polarização perpendicular, será possível enxergar bem o que existe abaixo, pois não haverá reflexos atrapalhando (veja figura). Ou seja, o observador que olha ao longo da reta que termina em b, e elimina a polarização perpendicular com um nicol (polaroide), não vê o Sol, e vê o peixe (que, sem isso, não seria visto, por causa da imagem do Sol superposta a ele).

2.3.2 Incidência perpendicular

Neste caso supomos que o ângulo de incidência, θ_1, seja muito próximo de zero. É claro que θ_2 também o será. Apezar de ser um caso particular, é um caso importante. Por exemplo, a detecção de um objeto pelo radar, que envia um pacote de ondas e o recebe de volta, só pode se dar nessas condições.

Usando as fórmulas anteriores, obtemos:

$$R_{\perp} = \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}\right)^2 \tag{58}$$

$$T_{\perp} = \frac{4\theta_1\theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2} \tag{59}$$

e, o que é característico dessa incidência perpendicular, os mesmos valores valem também para $R_{\parallel}$ e $T_{\parallel}$. Usando a lei de Snell e a aproximação, para pequenos ângulos, $\sin\theta \approx \theta$, temos

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

e, em conseqüência,

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2} \tag{60}$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{61}$$

sendo desnecessário especificar o estado de polarização. Na passagem do ar $(n_1 = 1)$ para o vidro $(n_2 = n)$ temos, supondo $n = 1,5$,

$$R = \frac{1}{25}$$

isto é, 4% da luz é refletida, na incidência perpendicular. Para um índice de refração alto, haverá muita reflexão. O diamante tem índice de refração $n = 2,3$. Isto dá, usando a Eq.(61), uma reflexividade de 15%, muito alta. É por esta razão que o diamante brilha tanto!