Interação Eletromagnética

Formalismo Hamiltoniano

O problema que estudaremos aqui é o seguinte: uma partícula de massa m e carga q está sob ação de um campo eletromagnético descrito por $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Determinar o Hamiltoniano da partícula.

Não fosse pelo campo eletromagnético, o Hamiltoniano seria o de uma partícula livre,

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \; .$$

A força que age sobre uma partícula de carga q, devida aos campos elétrico e magnético, é (força de Lorentz):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$$

Em termos dos potenciais, temos,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= rot\vec{A} \end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{F} = q\{-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times rot\, \vec{A}]\}$$

Como é bem sabido,[1]

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A} \; .$$

[1]No caso improvável de isto não ser bem sabido por um aluno do CCM, aí vai:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \ldots$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}_x \frac{\partial}{\partial x} + \ldots)\vec{A}$$

etc.

Como $\vec{v} \times rot\, \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A}) - (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A}$, temos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\{-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}[\frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A}) + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A}]\} \\ &= q\{-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}[\frac{d\vec{A}}{dt} - \vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A})]\} \qquad (1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{F} = q[-\vec{\nabla}(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}.\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}]\ . \qquad (2)$$

Seja $U = q(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}.\vec{A})$. Vamos mostrar que a lagrangeana

$$L = T - U = T - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A} \qquad (3)$$

descreve o movimento de uma partícula sob a ação da força $\vec{F}$. Aqui, como de costume, T representa a energia cinética. De fato,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \equiv \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial T}{\partial v_x} + \frac{q}{c}A_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial v_x}) + \frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt}$$

Logo, a equação de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x} = 0$, dá

$$-q\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial v_x}) + \frac{q}{c}\frac{dA_x}{dt}$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial v_x}) = q\{-\vec{\nabla}(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}.\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\}_x$$

Mas

$$\frac{\partial T}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) = mv_x$$

de maneira que

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial v_x}) = (m\vec{v})_x\ .$$

Logo,

$$m\dot{\vec{v}} = q\{-\vec{\nabla}(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}.\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\} \tag{4}$$

Conclusão: $L = T - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A}$. Passemos agora à construção do hamiltoniano.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\vec{v}.\vec{A})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\vec{v}.\vec{A}) = A_i$$

e, então,

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{q}{c}A_i$$

Precisamos agora de uma propriedade importante das funções homogêneas, o teorema de Euler (ver Apêndice):

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Vamos usá-lo para calcular o Hamiltoniano H:

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \dot{q}_i(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{q}{c}A_i) - T + q\phi - \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A} \\ &= 2T + \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A} - T + q\phi - \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A} \end{aligned} \tag{5}$$

ou seja,

$$H = T + q\phi \tag{6}$$

Ora, $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{q}{c}\vec{A}_i = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$, pois $T = \frac{m\vec{v}^2}{2}$. Logo,

$$m\vec{v} = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

e, finalmente,

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\phi \tag{7}$$

Em palavras, no Hamiltoniano livre

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2$$

substituo $\vec{p}$ por $\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$, e adiciono $q\phi$. Esta é a chamada *substituição mínima*, ou *acoplamento mínimo*. Se o hamiltoniano for mais geral, do tipo

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V(\vec{r})$$

onde $V(\vec{r})$ é a energia potencial, a mesma regra vale. Adicione-se $q\Phi$ e substitua-se $\vec{p}$ por $\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$. Se houver várias partículas, de momentos $\vec{p}_i$, faça-se a mesma substituição para cada $\vec{p}_i$, adicionando-se termos de energia potencial $q_i\phi$ para cada partícula. Essas generalizações são fáceis de demonstrar, seguindo exatamente o padrão do caso de uma partícula livre.

Apêndice

O teorema de Euler

Uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é dita homogênea de grau k se

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{8}$$

Por exemplo, $f(x,y) = xy$ é homogênea de grau 2;$f(x,y,z) = x^2y + 3z^2x + 5xyz$ é homogênea de grau 3.

O teorema de Euler diz que, se f é uma função homogênea de grau k, então

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf \tag{9}$$

A demonstração é muito simples. Derive a Eq. 8 em relação a λ, e depois tome $\lambda = 1$.