

Teoria da dispersão

Henrique Fleming

6 June 2001

1 Introdução

Quando um campo elétrico oscilante, como o de uma onda eletromagnética, atinge um dielétrico, cria um dipolo oscilante em cada átomo. Para frequências não muito distintas da frequência natural de vibração do átomo, este vibra em uníssono com o campo. Suponha, porém, que a frequência do campo seja muito mais alta do que aquela em que é fácil para o átomo vibrar. O que acontece é que, quando o átomo iniciou a vibração solicitada pelo campo, o campo já mudou, e o fenômeno se complica, já que a inércia do átomo conserva uma certa “memória” dos campos que já não existem mais. Assim, a *polarização* do dielétrico tem uma dependência complicada com a frequência do campo polarizador. A polarização depende, isto é, tanto do valor do campo no presente, $\vec{E}(t)$, quanto dos valores do campo no passado, $\vec{E}(t - \tau)$. Além disso, e principalmente, a constante dielétrica, que sumariza os efeitos da polarização, dependerá da frequência. Como a velocidade da luz é inversamente proporcional a $\sqrt{\epsilon}$, concluímos que a refração dependerá da frequência: a refração separará as cores (daí o nome de dispersão para este fenômeno).

Antes de mais nada, investiguemos se faz algum sentido tentar descrever a dispersão com o uso da física clássica.

Um campo elétrico que varia no tempo varia também no espaço, e essas variações estão ligadas pela relação $\lambda = \frac{c}{\nu}$, onde ν é a frequência e λ é o comprimento de onda. Existem frequências para as quais λ é da ordem do raio do átomo: para essas, claramente se necessita da mecânica quântica. Existirá algum intervalo de frequências para as quais a dispersão já é importante mas $\lambda \gg a$, onde a é o raio do átomo? Seja v a velocidade típica do elétron num átomo; então $\frac{a}{v}$ será o tempo típico para uma deformação do átomo, e $\frac{v}{a}$ será a frequência das deformações, ω_{def} . O comprimento de onda correspondente à frequência de deformações, ω_{def} , é eficaz para a dispersão. Como $v \ll c$, temos

$$\lambda \sim \frac{c}{\omega_{def}} = \frac{c}{\frac{v}{a}} = \frac{ac}{v} \gg a$$

logo, teremos dispersão importante ainda com $\lambda \gg a$, domínio de aplicabilidade da física clássica.

2 Equações constitutivas

As equações de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

e a expressão da polarização,

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} \quad (1)$$

precisam ser suplementadas por equações constitutivas. Para frequências altas temos, normalmente, campos fracos, o que sugere uma relação linear entre \vec{D} e \vec{E} . A existência de memória sugere, então,

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

Introduzindo as transformadas de Fourier

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

obtem-se¹

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega t} \left(\vec{D}(\omega) - \vec{E}(\omega) - \int_0^\infty d\tau f(\tau) \vec{E}(\omega) e^{i\omega\tau} \right) = 0 \quad (4)$$

ou seja,

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (5)$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (6)$$

Portanto, para campos periódicos, é vantajoso expressar as equações constitutivas em termos da frequência; naturalmente $\epsilon(\omega)$ depende das propriedades do meio. Note que $\epsilon(\omega)$ é um número complexo, podendo ser escrito

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

e, usando Eq.(20),

$$\epsilon(-\omega) = 1 + \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{-i\omega\tau} = \epsilon^*(\omega) \quad (7)$$

Equivalentes à relação $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ são:

$$\epsilon'(-\omega) = \epsilon'(\omega) \quad (8)$$

$$\epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega) \quad (9)$$

¹ $\vec{E}(t)$ é real. Logo, $\vec{E}(t) = \vec{E}(t)^*$, o que implica em $\vec{E}(-\omega) = \vec{E}(\omega)^*$.

ou seja, a parte real de ϵ é uma função par; a parte imaginária é uma função ímpar. Numa expansão em série de potências de ω , a parte real de ϵ começará com uma potência zero de ω (a constante dielétrica ordinária), vindo a seguir uma correção quadrática. Já a parte imaginária conterá apenas potências ímpares, e, em particular, se anula para $\omega = 0$. Em outras palavras, o limite da eletrostática não oferece qualquer informação sobre a parte imaginária da permissividade (que é o nome “oficial” de ϵ).

3 Limite de altas frequências

No limite $\omega \rightarrow \infty$ não há polarização, ou seja, $\epsilon(\infty) \rightarrow 1$. A seguir obteremos o comportamento de $\epsilon(\omega)$ para grandes valores de ω de forma mais detalhada usando um modelo muito simples.

Se a frequência for grande comparada às frequências dos movimentos de todos os elétrons, esses poderão ser considerados livres. Além disso, de $v \ll c$ segue que $\frac{v}{\omega}$, a distância percorrida por um elétron durante um período da oscilação satisfaz a

$$\frac{v}{\omega} \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Logo, o elétron, durante um período, explora uma pequenínssima porção de um comprimento de onda, ou seja, praticamente não sente a variação espacial do campo. Pode-se, então, tomar o campo como uniforme. A equação de movimento do elétron será

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}$$

ou

$$\vec{v} = \frac{ie}{m\omega} \vec{E}$$

pois, para a dependência harmônica $e^{i\omega t}$ da velocidade, a derivada no tempo é equivalente à multiplicação por $i\omega$. Logo,

$$\vec{r} = \frac{ie}{m\omega} \vec{E}$$

e, também,

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m\omega^2}$$

O vetor de polarização \vec{P} (momento de dipolo induzido por unidade de volume) é

$$\vec{P} = Ne\vec{r} = Ne \left(-\frac{e\vec{E}}{m\omega^2} \right)$$

onde N é o número de elétrons por unidade de volume. Conseqüentemente,

$$\vec{P} = -\frac{e^2 N \vec{E}}{m\omega^2}$$

A relação bem conhecida (que é, de fato, a definição de \vec{D})

$$\epsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

leva então a

$$\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega) = \vec{E}(\omega) - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\vec{E}(\omega)$$

ou, finalmente, a

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} \quad (10)$$

que é o limite procurado.

4 A energia do campo em meios dispersivos

Em um meio dielétrico isotrópico de dispersão desprezível se tem

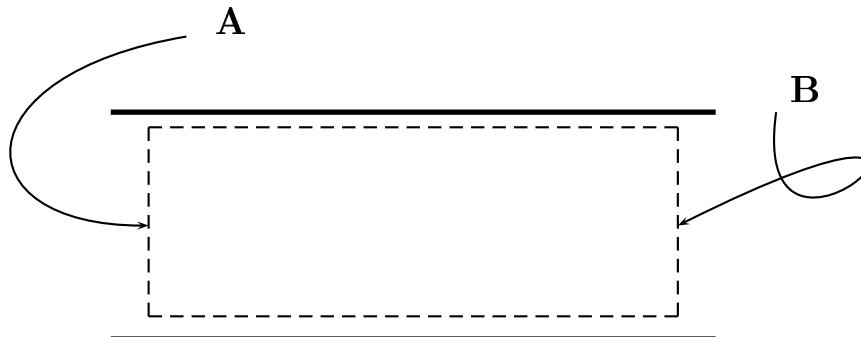
$$\text{div}\vec{S} = -\frac{\partial U}{\partial t}$$

onde \vec{S} é o vetor de Poynting e U a densidade de energia, dada por

$$U = \frac{1}{8\pi} (\epsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)$$

O resultado exato, que não depende de hipóteses sobre a existência ou não de dispersão é:

$$\text{div}\vec{S} = -\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (11)$$



Na figura acima, o retângulo tracejado delimita um trecho do meio material onde a onda se propaga. É suposto que esse trecho é longo o suficiente para que toda a energia da onda seja absorvida, de maneira que, da energia que penetra no volume pela face A , nenhuma emerge pela face B (\vec{S} é \perp às faces A e B). A integral volumétrica de $\text{div } \vec{S}$ dá, então, a quantidade de energia absorvida. Como ela é transformada em calor, há uma variação da entropia, que é, pela segunda lei da termodinâmica, necessariamente positiva, dada por $-\text{div } \vec{S}$.

Pondo

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*) \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}(\epsilon\vec{E} + \epsilon^*\vec{E}^*) \\ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} &= \frac{-i\omega}{2}(\epsilon\vec{E} - \epsilon^*\vec{E}^*)\end{aligned}$$

e analogamente para \vec{B} e \vec{H} , temos

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{4}\{\epsilon\vec{E} \cdot \vec{E} - \epsilon^*\vec{E} \cdot \vec{E}^* + \epsilon\vec{E}^* \cdot \vec{E} - \epsilon^*\vec{E}^* \cdot \vec{E}^*\} \quad (12)$$

Os termos em $\vec{E} \cdot \vec{E}^*$ não oscilam. Os outros termos têm um fator oscilante $e^{\pm 2i\omega t}$, e desaparecem na média por período, de maneira que a contribuição finita é

$$-\text{div } \vec{S} = Q = \frac{\omega}{8\pi}(\epsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''|\vec{H}|^2), \quad (13)$$

representando a quantidade de calor produzida por unidade de tempo e unidade de volume. Q tem de ser positivo, e daí seguem os importantes resultados

$$\epsilon'' > 0 \quad (14)$$

$$\mu'' > 0 \quad (15)$$

Mais geralmente, para o caso não-monocromático, procede-se assim:

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (17)$$

com $\vec{E}(-\omega) = \vec{E}^*(\omega)$. Vamos construir agora os vários termos que aparecem na Eq.(11).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega') \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega+\omega')t} \\ &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \vec{E}(-\omega) \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \epsilon(\omega) |\vec{E}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \epsilon''(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

onde usamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega \epsilon'(\omega) |\vec{E}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 0$$

uma vez que o integrando é função ímpar de ω . Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left(\epsilon''(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2 + \mu''(\omega) |\vec{H}(\omega)|^2 \right) \frac{d\omega}{2\pi} > 0 \quad (18)$$

com $\epsilon''(\omega) > 0$ e $\mu''(\omega) > 0$ para todo ω .

5 Propriedades analíticas de $\epsilon(\omega)$

Decorrem da representação integral de $\epsilon(\omega)$, Eq.(20), que repetimos para a conveniência do leitor,

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (19)$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (20)$$

lembrando que $f(\tau)$ é finita para todo τ , incluindo 0. Para dielétricos, $f(\tau)$ tende a zero para $\tau \rightarrow \infty$. Escrevendo

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i(\omega' + i\omega'')\tau} d\tau \quad (21)$$

vê-se que

$$\int_0^{\infty} d\tau f(\tau) e^{i\omega'\tau} e^{-\omega''\tau} \quad (22)$$

indica que $\epsilon(\omega)$ é analítica em ω para $\omega'' > 0$; para $\omega'' < 0$ a representação integral não é válida, e os valores de ϵ no semiplano inferior ω devem ser obtidos por prolongamento analítico do semiplano superior. Haverá, em geral, singularidades. No eixo real ($\omega'' = 0$), $\epsilon(\omega)$ não tem singularidades, pois, para $\omega' > 0$, temos valores físicos de ϵ' , que é função par de ω . Na origem não há singularidades para dielétricos, mas há um polo para condutores (ver abaixo).

Note-se que a analiticidade de ϵ no semiplano superior é uma consequência do fato de a integração em τ ser de 0 a ∞ , e não de $-\infty$ a ∞ . Logo, essa analiticidade é uma consequência da *causalidade*.

Os teoremas básicos usados nessa análise são os seguintes:
1. Titchmarsh, 2.83[1]

Let $f(z, w)$ be a continuous function of the complex variables z and w , where z ranges over a region D , and w lies on a contour C . Let $f(z, w)$ be an analytic function of z in D , for every value of w on C . Then

$$F(z) = \int_C f(z, w) dw$$

is an analytic function of z in D , and

$$F'(z) = \int_C \frac{\partial f}{\partial z} dw$$

and similarly for higher derivatives.

No nosso caso $\epsilon(\omega)$ é definido pela Eq.(20), que envolve uma integral num contorno (semi-eixo real positivo). As variáveis z e w do teorema são, respectivamente, ω e τ . Para mostrar que $\epsilon(\omega)$ é analítica para $\omega'' \geq 0$, temos de mostrar que:

1. $e^{i\omega\tau}$ é analítica em ω para $\omega'' > 0$ e para todo $0 \leq \tau \leq \infty$. Óbvio.
 2. $f(\tau)e^{i\omega\tau}$ é uma função contínua de ω e τ para $\omega'' > 0$ e $0 \leq \tau \leq \infty$.
- Contudo, há o problema da convergência da integral. Por isso, temos de usar outro teorema (Titchmarsh 2.84)[1]:

Let C be a contour going to ∞ . Suppose that the conditions of the precedent theorem are satisfied on any bounded part of C , and that

$$\int_C f(z, w) dw$$

is uniformly convergent. Then the results of the previous theorem still hold.

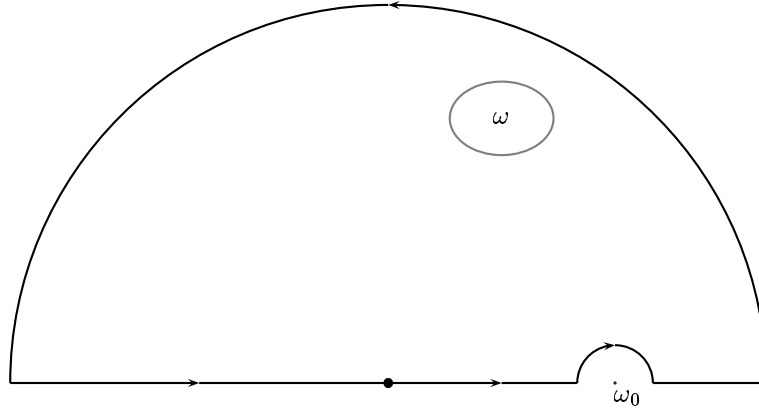
Ora, $\int_0^\infty f(\tau) d\tau$ é convergente por hipótese. $\int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega'\tau} e^{-\omega''\tau}$ é mais convergente ainda, para $\omega'' > 0$, do que a anterior. Logo, é uniformemente convergente. (É majorada por uma integral uniformemente convergente).

6 Relações de dispersão

Considere a integral

$$I = \int_C \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (23)$$

no plano complexo ω . O ponto ω_0 é um valor real e positivo de ω . O contorno percorre o eixo real de $-\infty$ a ∞ , "salta" o ponto ω_0 como indicado na figura, e se fecha por um semi-círculo de raio R no semiplano superior. Toma-se depois o limite $R \rightarrow \infty$.



Pela analiticidade de $\frac{\epsilon(\omega)}{\omega - \omega_0}$ no interior do contorno, temos $I = 0$. A integral no círculo grande é zero, pois tomando $\omega = Re^{i\theta}$,

$$\epsilon(Re^{i\theta}) = 1 + \int_0^\infty e^{i\tau Re^{i\theta}} f(\tau) d\tau \quad (24)$$

$$= 1 + \int_0^\infty e^{i\tau R \cos \theta} e^{-\tau R \sin \theta} f(\tau) d\tau \quad (25)$$

$$\rightarrow 1 \quad (26)$$

$$\epsilon(Re^{i\theta}) - 1 \rightarrow 0 \quad (27)$$

Por outro lado,

$$I = \int_0^{2\pi} Re^{i\theta} i d\theta \frac{\epsilon(Re^{i\theta}) - 1}{Re^{i\theta} - \omega_0} \approx i \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta (\epsilon(Re^{i\theta}) - 1) \rightarrow 0 \quad (28)$$

Em conseqüência,

$$\int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{C'} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = 0 \quad (29)$$

onde C' é um semicírculo em torno do ponto ω_0 .

A terceira integral dá, trivialmente,

$$\int_{C'} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = -i\pi(\epsilon(\omega_0) - 1), \quad (30)$$

no limite $\epsilon \rightarrow 0$ (ϵ é o raio do pequeno semicírculo C'). Logo,

$$\int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = i\pi(\epsilon(\omega_0) - 1) \quad (31)$$

e

$$i(\epsilon(\omega_0) - 1) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (32)$$

onde P indica o valor principal de Cauchy. Neste ponto é conveniente fazer mudar a notação. O que era ω passa a ser x ; o que era ω_0 passa a ser ω .

Tomando agora separadamente a igualdade entre as partes reais e imaginárias, temos:

$$i(\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) - 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) + i\epsilon''(x) - 1}{x - \omega} dx \quad (33)$$

de onde sai imediatamente que

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx \quad (34)$$

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad (35)$$

que são as relações de Kramers [2], Kronig[3]. Estas relações têm inúmeras aplicações. Damos alguns exemplos.

1. Se um meio dielétrico não absorve em nenhuma frequência, também não polariza em nenhuma frequência, ou seja, é o vácuo. Logo, só o vácuo é totalmente transparente.

2. Se um meio se polariza, necessariamente absorve (logicamente equivalente à anterior!).

6.1 Meios transparentes

Meios dielétricos podem ser transparentes, isto é, ter absorção nula, para certos intervalos de frequência. Suponhamos que um meio seja transparente em um intervalo que inclui a frequência ω . Então $\epsilon''(\omega) = 0$ e

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx, \quad (36)$$

já que a singularidade em ω desaparece por causa do zero no numerador. Derivando em relação a ω ,

$$\frac{d\epsilon'}{d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon''(x) \frac{dx}{(x - \omega)^2} > 0 \quad (37)$$

ou seja, a permissividade (que nome!) cresce com a frequência. Ora, $n = \epsilon'^2$ (onde n é o índice de refração), logo,

$$\frac{dn}{d\omega} = 2\epsilon' \frac{d\epsilon'}{d\omega} \quad (38)$$

Na Eq.(35), usando o fato de que $\epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega)$, podemos por

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad (39)$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad (40)$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon''(x)}{-x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad (41)$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \epsilon''(x) \left(\frac{1}{x - \omega} + \frac{1}{x + \omega} \right) dx \quad (42)$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \epsilon''(x) \frac{x - \omega + x + \omega}{x^2 - \omega^2} dx \quad (43)$$

$$= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (44)$$

Se o meio é transparente para a frequência ω ,

$$\frac{d\epsilon'(\omega)}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x \epsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2} > 0 \quad (45)$$

$$\omega^2(\epsilon'(\omega) - 1) = \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} \quad (46)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{(\omega^2 - x^2) x \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3 \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} \quad (47)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3 \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x \epsilon''(x) dx \quad (48)$$

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^2 (\epsilon'(\omega) - 1)] = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3 \epsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2} dx > 0$$

de onde segue que

$$2\omega (\epsilon'(\omega) - 1) + \omega^2 \frac{d\epsilon'}{d\omega} > 0$$

e

$$\frac{d\epsilon'}{d\omega} > 2 \frac{1 - \epsilon'}{\omega}$$

Concluindo, temos as desigualdades

$$\frac{d\epsilon'}{d\omega} > 0 \quad (49)$$

$$\frac{d\epsilon'}{d\omega} > 2 \frac{1 - \epsilon'}{\omega} \quad (50)$$

Note-se que, se $\epsilon' < 1$, a segunda desigualdade é mais forte.

6.2 Relação com a velocidade de propagação.

A velocidade de propagação da onda no meio material é a velocidade de grupo, dada por $\frac{d\omega}{dk}$. Temos $k(\omega) = \sqrt{\epsilon'(\omega)} \frac{\omega}{c}$. Considere um meio não dispersivo para um certo intervalo de frequências que inclui ω . Nele, $k = \sqrt{\epsilon'} \frac{\omega}{c}$, e

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{\sqrt{\epsilon'}}{c}$$

ou seja, a velocidade u satisfaz

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}}.$$

Em meios dispersivos,

$$\begin{aligned}\frac{dk}{d\omega} &= \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (\sqrt{\epsilon' \omega}) \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (n\omega) \\ u &= \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(n\omega)}\end{aligned}$$

Colocando $\epsilon' = n^2$ na Eq.(50), vem

$$\frac{dn^2}{d\omega} > 0 \quad (51)$$

de onde segue que

$$\frac{dn}{d\omega} > 0 \quad (52)$$

que é uma relação muito importante: ela *ordena* as cores na dispersão. Na decomposição da luz branca por um prisma, a luz mais desviada é o azul, de frequência mais alta. Note-se que não se fez uso de nenhum modelo para a dispersão. Isto é uma consequência da *causalidade*. Note-se ainda que

$$\frac{d}{d\omega}(n\omega) = \omega \frac{dn}{d\omega} + n > n$$

Logo,

$$\frac{d}{d\omega}(n\omega) > n$$

e

$$u = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(n\omega)} < \frac{c}{n} \quad (53)$$

que mostra que a velocidade de grupo é sempre menor que a de fase.

References

- [1] Titchmarsh, E. C., *Theory of Functions*, Oxford University Press.
- [2] H. A. Kramers, *Atti Congr. Int. Fis. Como* **2**, 545(1927).
- [3] R. de L. Kronig, *J. Opt. Soc. Amer. Rev. Sci. Instrum.* **12**, 547(1926).