O dipolo magnético

Henrique Fleming

19 Setembro 2001

1 O campo de dipolo magnético

Sabemos bem o que é um dipolo elétrico: duas cargas de mesmo valor e sinais opostos, a uma distância d uma da outra, e observadas a uma distância muito maior do que d. Nessas condições, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}.\vec{n})\vec{n} - \vec{p}}{r^3} \tag{1}$$

Neste caso, o dipolo (ou, mais precisamente, a carga negativa) está na origem; a carga positiva,q, está na posição indicada pelo vetor $\vec{d}$, que nasce na origem e termina na carga positiva. O vetor $\vec{p} = q\vec{d}$ é denominado *momento de dipolo*. Finalmente, $\vec{n}$ é o vetor unitário na direção radial. Vemos, assim, que o campo do dipolo decresce com a distância mais rapidamente do que o de uma carga isolada.

Definimos como campo de dipolo magnético ao campo magnético $\vec{B}$ que tem a seguinte expressão:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m}.\vec{n})\vec{n} - \vec{m}}{r^3}\ , \tag{2}$$

ou seja, é formalmente idêntico a um campo elétrico de dipolo. Não é óbvio que este campo magnético exista. Precisamos, então, exibir uma distribuição de correntes que gere este campo. Empiricamente, porém, sabemos que campos desse tipo existem, e são muito abundantes: o campo de um imã de barra, por exemplo, é excelentemente descrito por um $\vec{B}$ dessa forma, assim como o campo magnético da Terra. Porém, como, para nós, a fonte de um campo magnético é uma corrente, devemos exibí-la.

1.1 O potencial vetor

O primeiro passo é descobrir um potencial vetor que corresponda ao campo da Eq.(2). Vamos mostrar que

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{3}$$

De fato, levando em conta que

$$rot\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}rot(\vec{m} \times \vec{r}) + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) \times (\vec{m} \times \vec{r}) \tag{4}$$

e que

$$rot(\vec{m} \times \vec{r}) = 2\vec{m} \tag{5}$$

obtém-se o resultado com cálculos simples. É preciso ainda certificar-se de que $div\vec{A} = 0$, o que é um exercício simples.

2 Exibindo o dipolo magnético

Uma distribuição de correntes estacionárias é descrita por um campo vetorial $\vec{j}(\vec{r})$ que é tal que

$$div\vec{j} = 0 \tag{6}$$

O potencial vetor gerado por essa distribuição é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r'}\frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{7}$$

As correntes estão confinadas numa região finita, ou seja, existe um valor a tal que $|\vec{r'}| < a$. Estamos observando essa distribuição de longe, ou seja, $r >> a$. Neste caso,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}.\vec{r'}}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}.\vec{r'}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2\vec{r}.\vec{r'}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}.\vec{r'}}{r^3} \tag{10}$$

desprezando-se os termos adicionais, que são pequenos. Logo,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{rc}\int \vec{j}(\vec{r'})d^3\vec{r'} + \frac{1}{cr^3}\int (\vec{r}.\vec{r'})\vec{j}(\vec{r'})d^3\vec{r'} \tag{11}$$

A primeira integral se anula para correntes estacionárias. De fato, sendo $div\vec{j} = 0$, temos

$$\int d^3\vec{r}x\ div\vec{j} = \int d^3\vec{r}div(x\vec{j}) - \int d^3\vec{r}\vec{\nabla}x.\vec{j} \tag{12}$$

ou

$$0 = \int_S x\vec{j}.\vec{n}dS - \int d^3\vec{r}j_x \tag{13}$$

onde usamos o teorema do divergente para transformar a primeira integral do segundo membro da Eq.(12) em uma integral de superfície. Como a integração era sobre todo o volume, a superfície está no infinito, onde o integrando é zero, como toda quantidade física. Por isso, na Eq.(13), a primeira integral do segundo membro é nula, e se obtém

$$\int d^3\vec{r}j_x = 0 \tag{14}$$

De forma análoga se mostra que as demais componentes também se anulam, e, portanto, que

$$\int d^3\vec{r}\vec{j}(\vec{r}) = 0 \tag{15}$$

se $div\vec{j} = 0$. Temos, assim, para uma distribuição estacionária de correntes "olhada de longe",

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3}\int d^3\vec{r'}(\vec{r}.\vec{r'})\vec{j}(\vec{r'}) \tag{16}$$

3 Um teorema útil

O seguinte teorema, corolário do teorema de Stokes, facilitará muito a nossa tarefa:

Seja S uma superfície delimitada por uma curva fechada com um sentido de percurso escolhido. Seja $\vec{n}$ o campo das normais à superfície, coordenadas com o sentido de percurso pela "regra do saca-rolhas". Seja ainda f uma função. Então,

$$\oint fd\vec{l} = \int\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}f\right)dS \tag{17}$$

A demonstração é uma aplicação direta do teorema de Stokes. Considere o campo vetorial $f\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é um campo constante (uniforme, na linguagem dos físicos). Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int rot(f\vec{v}).\vec{n}dS = \oint f\vec{v}.d\vec{l} = \vec{v}.\oint f\, d\vec{l} \tag{18}$$

Mas $rot(f\vec{v}) = f\, rot\vec{v} + \vec{\nabla}f\times\vec{v}$,e, como $\vec{v}$ é constante, $rot\vec{v} = 0$. Logo,

$$\int_S\left(\vec{\nabla}f\times\vec{v}\right).\vec{n}dS = \vec{v}.\oint f\, d\vec{l} \tag{19}$$

Mas $\vec{n}.(\vec{\nabla}f\times\vec{v}) = \vec{v}.(\vec{n}\times\vec{\nabla}f)$, logo,

$$\vec{v}.\int\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}f\right)dS = \vec{v}.\oint fd\vec{l}$$

Para que isto seja verdade para qualquer $\vec{v}$ constante, devemos ter a Eq.(17) satisfeita.

4 Retomando a estrada

Tínhamos obtido que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3}\int d^3\vec{r'}(\vec{r}.\vec{r'})\vec{j}(\vec{r'}) \tag{20}$$

Para circuitos em fios. $d^3\vec{r}\vec{j} = i\ d\vec{l}$, logo,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{i}{cr^3}\oint(\vec{r}.\vec{r'})\vec{j}(\vec{r'}) \tag{21}$$

Usando o nosso teorema, temos

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{i}{cr^3}\int dS\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}'(\vec{r}.\vec{r'})\right) & (22)\\
&= \frac{i}{cr^3}\int dS\vec{n}\times\vec{r} & (23)\\
&= \frac{i\vec{S}}{cr^3}\times\vec{r} & (24)
\end{aligned}$$

onde usamos que $\vec{\nabla}'(\vec{r}.\vec{r'}) = \vec{r}$. Além disso, supusemos que o circuito é uma curva plana, e que a superfície de integração é um trecho do plano. neste caso, $\vec{n}$ é um vetor constante, e

$$\int dS\vec{n} = \vec{n}\int dS = S\vec{n} \equiv \vec{S}$$

onde a última igualdade define o "vetor superfície", $\vec{S}$, que é um vetor cujo módulo é a área da superfície, perpendicular à superfície e com o sentido coordenado ao sentido de percurso da curva pela regra do saca-rolhas. Resumindo, temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{i\vec{S}}{cr^3}\times\vec{r} = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{25}$$

com

$$\vec{m} = \frac{i\vec{S}}{c} \tag{26}$$

Assim, descobrimos que o momento de dipolo magnético de um circuito simples (anel de corrente) é proporcional à sua área e à corrente que passa pelo fio.