Diferenciabilidade *for the practical man*

Henrique Fleming

1 Comecinho

O leitor destas notas estará familiarizado com funções de uma variável real, e de valores reais, que sejam contínuas e diferenciáveis até qualquer ordem. Estas funções têm o nome de *funções* C^∞. Os físicos se referem a elas dizendo que são *bem comportadas*.

Para um tratamento semelhante ao meu, mas com figuras bonitas, veja

`http://oregonstate.edu/dept/math/CalculusQuestStudyGuides/vcalc/partial/partial.html`

Para funções diferenciáveis de uma variável, temos uma maneira importantíssima de resolver o seguinte problema: dado o valor da função em um ponto P, determinar o valor dela num outro ponto, bem próximo,$P + dP$. Seja x a coordenada do ponto P, e $x + dx$ a coordenada do ponto $P + dP$. Então

$$f(x+dx) \approx f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right)_x dx \tag{1}$$

que é a *fórmula dos acréscimos finitos.*

Exercícios:
(1)Mostre que, para x muito pequeno,

$$\begin{aligned} e^x &\approx 1+x \\ \sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1 \\ \log(1+x) &\approx x \\ (1+x)^\alpha &\approx 1+\alpha x \end{aligned}$$

(2)A correção seguinte é dada pela fórmula

$$f(x+dx) = f(x) + dx\,\left(\frac{df}{dx}\right)_x + \frac{1}{2!}(dx)^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_x \tag{2}$$

Para cada função do exercício (1), calcule esta nova aproximação.

Consideremos agora uma função de 3 variáveis, $f(x,y,z)$ com valores reais. Os matemáticos diriam:

$$f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{3}$$

onde O é um aberto de $\mathbb{R}^3$. Gostaríamos de ter uma fórmula dos acréscimos finitos também neste caso. Para isso precisamos do conceito de *derivada parcial.* Uma função como a que descrevemos será diferenciável se existirem, e forem contínuas, as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, denominadas derivadas parciais de f, e definidas assim:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0,z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h} \tag{4}$$

ou seja, é a derivada de f em relação a x como se y e z fossem constantes. Definições análogas são dadas para $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Um ponto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) pode ser representado pelo vetor $\vec{r}_0 = x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$. Um ponto genérico é representado pelo vetor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Um valor genérico da função f pode então ser escrito como

$$f(x,y,z) = f(\vec{r}) \tag{5}$$

Diz-se que uma função f é contínua no ponto $\vec{r}_0$ se, dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que

$$|f(\vec{r}) - f(\vec{r}_0)| < \epsilon \quad \text{desde que} \quad |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta \tag{6}$$

Em palavras, para $\vec{r}$ muito próximo de $\vec{r}_0$, $f(\vec{r})$ é muito próximo de $f(\vec{r}_0)$. Uma função é diferenciável se: (1) For contínua; (2) Seu gráfico não tiver "bicos" ou "vincos". No caso de uma função de duas variáveis, $f(x,y)$, podemos visualizar esse conceito assim: o gráfico da função, ou seja, o gráfico $z = f(x,y)$, é, se ela for contínua, uma superfície "acima" do plano xy. A função é diferenciável num ponto (x,y), se o a superfície do gráfico tiver um plano tangente no ponto $(x,y,z=f(x,y))$. Neste caso, localmente, a superfície do gráfico se confunde com o plano tangente. Veja as figuras da segunda referência da internet, abaixo.

A fórmula dos acréscimos finitos, neste caso, é

$$f(x+dx,y+dy,z+dz) = f(x,y,z) + dx\frac{\partial f}{\partial x} + dy\frac{\partial f}{\partial y} + dz\frac{\partial f}{\partial z} \tag{7}$$

sendo as derivadas parciais do segundo membro calculadas no ponto (x,y,z).

Exemplos:
(1)$f(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^3$.
As derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xyz + y^2z + yz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2z + 2xyz + xz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x^2y + xy^2 + 3xyz^2 \end{aligned}$$

(2)$f(x,y,z) = x + y + z$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 1 \end{aligned}$$

(3)$f(x,y,z) = x(\log y)e^z$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (\log y)e^z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{y}e^z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x(\log y)e^z \end{aligned}$$

(4) Resultados importantes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x} &= 1 \\
\frac{\partial x}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial x}{\partial z} &= 0 \\
\text{etc...}
\end{aligned}$$

Exercícios:
(1) Considere a função $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
(a)Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ e $\frac{\partial r}{\partial z}$.
(b)Usando a fórmula dos acréscimos finitos, calcule $r(x + dx, y + dy, z + dz)$.
(c) Seja $dr = r(x + dx, y + dy, z + dz) - r(x, y, z)$ Mostre que

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

A fórmula dos acréscimos finitos, eq.(7), pode ser reescrita em termos de vetores: seja $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Defino o gradiente de f assim:

$$\vec{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{8}$$

O símbolo $\vec{\nabla}$ é pronunciado "nabla" porque, diz-se, tem a forma de uma antigo instrumento musical hebraico. Outros dizem que é a letra "G" no alfabeto Klingon. Go figure!

O fato é que a fórmula dos acréscimos finitos pode agora ser escrita assim:

$$df \equiv f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = d\vec{r}.\vec{\nabla} f \tag{9}$$

Exemplos:
(1)A função $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância do ponto de coordenadas x, y e z à origem. Calculemos o seu gradiente. Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r}
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\vec{\nabla} r = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

e, como $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}$, o resultado é

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Notando que r é o módulo de $\vec{r}$, vemos que o gradiente de r é o vetor unitário na direção radial, ou seja, na direção em que a distância do ponto (x, y, z) à origem cresce mais rapidamente. Veremos que isto não é coincidência.

(2) Considere uma função qualquer da variável r, que vem a ser a função descrita acima. Temos aqui um caso de função composta (ou "função de função"):

$$f(r) = f(r(x, y, z))$$

e a função é, em última análise, função de x, y e z. Temos, então, de calcular derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, etc. Demonstra-se o importante resultado, denominado *regra da cadeia*:[1]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}
\end{aligned}$$

Podemos agora calcular $\vec{\nabla} f$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f(r) &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\
&= \frac{df}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right) \\
&= \frac{df}{dr}\vec{\nabla} r
\end{aligned}$$

Obtivemos, assim, uma fórmula muito importante:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \tag{10}$$

Exemplos:

$$\vec{\nabla} r^2 = \frac{dr^2}{dr}\vec{\nabla} r = 2r\frac{\vec{r}}{r} = 2\vec{r}$$
$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2 Meio

A esta altura, o leitor deve rever, com muita atenção, o Capítulo 7 (Conservação da energia no movimento geral) do livro *Física Básica*, Vol.1, de H.M. Nussenzveig.

---

[1]Este é um caso particular da regra da cadeia mais geral: sejam $\theta(x, y, z)$, $\phi(x, y, z)$ e $r(x, y, z)$ funções (diferenciáveis) e consideremos uma função $f(r, \theta, \phi)$. Naturalmente, em maior detalhe, teríamos:

$$f(r, \theta, \phi) = f(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z))$$

de modo que, em última análise, f é função de x, y, z. Como calcular as derivadas parciais de f em relação a x, y, z? A resposta é a regra da cadeia (aqui em toda a sua glória):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z}
\end{aligned}$$

Este é um dos resultados mais úteis da teoria.

2.1 Mais gradiente

A eq.(9) será usada para obter a propriedade fundamental do gradiente. Podemos escrevê-la

$$df(\vec{r}) = d\vec{r}.\vec{\nabla} f \tag{11}$$

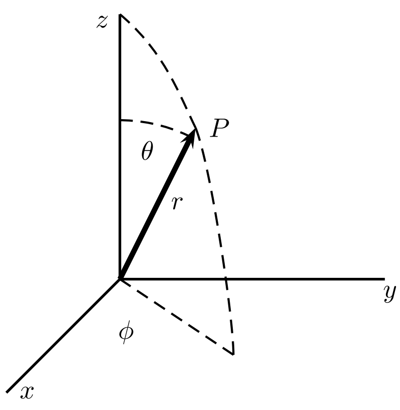
que é lida assim: quando o argumento de f (nome bonito para $\vec{r}$) é alterado pelo vetor $d\vec{r}$, ou seja, passa de $\vec{r}$ para $\vec{r} + d\vec{r}$, a função varia de df. Em (11), tomemos $|d\vec{r}| = 1$, o que dá, para o módulo de df:

$$df(\vec{r}) = |\vec{\nabla} f| \cos\theta \tag{12}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $d\vec{r}$ e $\vec{\nabla} f$. De (12) vemos que, dado $|\vec{\nabla} f|$, o máximo acréscimo à função f se dá para aquela direção de $d\vec{r}$ que corresponde ao máximo valor de $\cos\theta$, ou seja, $\theta = 0$. Isto é, o máximo acréscimo de f ocorre quando $d\vec{r}$ tem a mesma direção (e sentido) que o vetor $\vec{\nabla} f$. Em palavras, *o gradiente de uma função aponta para a direção de máximo crescimento dessa função.*

2.2 Coordenadas esféricas

As coordenadas cartesianas são as melhores, mas não são as únicas. Para determinar o vetor $\vec{r}$, que vai da origem ao ponto P, podemos dar as três componentes cartesianas de $\vec{r}$, que vêm a ser as três coordenadas cartesianas de P, mas também podemos dar o tamanho do vetor, sua direção e seu sentido. Ou seja, o módulo $|\vec{r}| \equiv r$ e dois ângulos que podem ser os ângulos θ e ϕ da figura. As <u>coordenadas esféricas</u> do ponto P são, então, r, θ e ϕ.



A relação entre as coordenadas cartesianas e esféricas é dada por

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{13}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{14}$$
$$z = r \cos\theta \tag{15}$$

sendo as inversas dadas por

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} && (16)\\
\phi &= \arctan\frac{y}{x} && (17)\\
\theta &= \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} && (18)
\end{aligned}
$$

As coordenadas cartesianas referem-se à base fixa formada pelos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. De fato, o vetor de posição $\vec{r}$, que termina no ponto P, tem projeções ao longo dos eixos dessa base que são exatamente as coordenadas de P. Note-se que

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}x &= \vec{i}\\
\vec{\nabla}y &= \vec{j}\\
\vec{\nabla}z &= \vec{k}
\end{aligned}
$$

Qual será a base que, para as coordenadas esféricas, desempenha o papel da base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$? A pista está dada pelas equações acima: devemos procurar os vetores que são os gradientes das funções $r(x,y,z)$, $\theta(x,y,z)$, $\phi(x,y,z)$.

Temos:

$$\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}\ . \tag{19}$$

Logo, temos o primeiro vetor da base,

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) \tag{20}$$

Analogamente, podemos calcular $\vec{e}_\theta$:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_\theta &= \vec{\nabla}\left(\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[xz\vec{i}+yz\vec{j}-(x^2+y^2)\vec{k}\right]
\end{aligned}
$$

Finalmente, calculamos $\vec{e}_\phi$:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_\phi &= \vec{\nabla}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\\
&= \frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Verifica-se sem qualquer dificuldade que os vetores $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ e $\vec{e}_\phi$ são ortogonais, e que $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\phi$ são unitários. Contudo, $\vec{e}_\theta$ é tal que

$$\vec{e}_\theta.\vec{e}_\theta = \frac{1}{r^2} \tag{21}$$

Em princípio não há qualquer problema em usar uma base de vetores não unitários. Porém, uma base ortonormal tem os seus confortos,[2] e então preferi-

[2] O principal dos quais é: sejam $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ vetores que constituem uma base ortonormal. Seja $\vec{v}$ um vetor qualquer. Então,

$$\vec{v} = (\vec{v}.\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}.\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{v}.\vec{e}_3)\vec{e}_3$$

mos usar os vetores

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \tag{22}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2} \tag{23}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left[xz\vec{i} + yz\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}\right] \tag{24}$$

Em termos desta base, seja $\vec{v}$ um vetor que começa no ponto P. Então podemos escrever

$$\vec{v} = (\vec{v}.\vec{e}_r)\vec{e}_r + (\vec{v}.\vec{e}_\theta)\vec{e}_\theta + (\vec{v}.\vec{e}_\phi)\vec{e}_\phi \tag{25}$$

ou

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\phi\vec{e}_\phi \tag{26}$$

2.3 Derivadas mistas

Dada uma função $f(x, y, z)$ e suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, etc, que também são funções, podemos calcular as derivadas parciais das derivadas parciais. Estas são chamadas de derivadas segundas de f. O seguinte resultado é extremamente importante tanto na própria matemática como nas aplicações: as derivadas mistas não dependem da ordem de derivação. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{27}$$

Exemplo:
A função $f(x, y) = x^y$. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yx^{y-1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(yx^{y-1}\right) = x^{y-1}(1 + y\log x) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (\log x)x^y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(\log x)x^y = x^{y-1}(1 + y\log x)
\end{aligned}$$

3 Fim

O que vimos aqui foi o que se chama uma “gambiarra”. Uma solução improvisada para resolver o problema de que os cursos de Física e Matemática não são sincronizados. Não é um problema do nosso curso, é um problema de todos os cursos. A própria Harvard University, a melhor do mundo, não o conseguiu resolver, e a prova disso é que dois grandes físicos de Harvard, Norman Ramsey (Prêmio Nobel de Física,1989) e Daniel Kleppner (que o ganhará a qualquer hora) resolveram escrever um livrinho chamado *Quick Calculus*, para que os estudantes de física pudessem calcular suas derivadas e integrais antes de qu os matemáticos chegassem lá. O “livrinho”, naturalmente, é excelente, e a biblioteca do Instituto de Física em toneladas dele: altamente recomendável.

Isto posto, é necessário dizer que os matemáticos não estão errados. O problema deles é ensinar matemática, e não física. E a matemática mudou muito, no século XX. Hoje em dia, o cálculo diferencial de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma elegante combinação de análise com álgebra linear (que é geometria: veja o extraordinário livrinho de Jean Dieudonné, *Linear Algebra and Geometry*), que esclareceu muitos pontos obscuros da análise clássica, até mesmo o conceito de diferencial de uma função, que foi profundamente modificado. Esta obra dos analistas, iniciada no final do século XIX com o estudo da integração e da topologia, constitui um grande triunfo da mente humana. Para iniciar-se nessas maravilhas não é nem necessário enrolar a lingua: Elon Lages Lima escreveu lindos volumes em português, que educam enquanto maravilham: chamam-se *Álgebra Linear* e *Curso de Análise*, vols.I e II.

Caro aluno, como dizia um assessor do presidente FHC, "não se apequene". Vá para o melhor. Depois desta inevitável gambiarra, mergulhe na bibliografia "verdadeira". Não podemos nos dar ao luxo de ignorar uma obra de arte que, afinal, está quase ao alcance das mãos.

4 Referências: internet

`http://oregonstate.edu/dept/math/CalculusQuestStudyGuides/vcalc/254.html`

`http://www.bio.brandeis.edu/biomath/populate/surface.html`

5 Referências: livros

Richard Courant, Herbert Robbins, *What is Mathematics.* Para iniciantes. Ensina as idéias do Cálculo Diferencial e Integral magistralmente, num estilo leve e agradável. Quando você vê, já aprendeu coisas tremendas! Apesar de ser para iniciantes, é tão bom que é lido até por matemáticos de verdade.

Godfrey Hardy, *Pure Mathematics.* Grande livro, escrito por um gênio.(Veja abaixo).

Camille Jordan, *Cours d'Analyse à L'Ecole Polytéchnique.* Grande livro, escrito por um gênio, sendo que o gênio de cima virou gênio lendo este livro. O livro de cabeceira também de Freeman Dyson.

Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, agüenta dignamente a companhia dos dois de cima. Não é pouco!

Richard Courant, *Differential and Integral Calculus*, bonito e estimulante.

Tom Apostol, *Calculus.* Enorme, mas o Sinuê gosta dele.

J.E.Thompson, *Calculus for the Practical Man.* Relíquia! O livro onde o Feynman estudou. Ainda existe à venda nos sebos americanos.

Sylvanus Thompson, Martin Gardner, *Calculus Made Easy.* Comentário de um leitor:
Sylvanus Thompson's Calculus Made Easy is arguably the best math teaching ever. To a non-mathematician, its simplicity and clarity reveals the mathematical genius of Newton, Leibniz,

and Thompson himself. Martin Gardner deserves huge thanks for renewing this great book. Julian Simon. (Outro livro em que Feynman estudou. Ainda à venda na Barnes & Noble!.)

Norman Ramsey, Daniel Kleppner, *Quick Calculus*, escrito no estilo da instrução programada.

Jean Dieudonné, *Linear Algebra and Geometry.* Grande matemático francês, que já foi professor da USP, constrói toda a geometria euclideana na linguagem da álgebra linear, e descobre que as duas coisas coincidem! Livro muito premiado pelo estilo e originalidade.

Elon Lages Lima, *Álgebra Linear.* Muito lúcido. Meu preferido para este tema.

Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, vols.1 e 2. Livro requintado, claro e com muitos exercícios.