Geometria Diferencial

Henrique Fleming

4-1-2002

Part I
Espaço Euclideano

1 Conceitos básicos (ver ref.[4])

Definição 1 *O espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais.*

A tripla $p = (p_1, p_2, p_3)$ é denominada um ponto de $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre os reais de maneira natural: se $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ são pontos de $\mathbb{R}^3$, sua soma é o ponto

$$p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

O múltiplo escalar de um ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$ por um número a é o ponto

$$ap = (ap_1, ap_2, ap_3)\ .$$

Verifica-se facilmente que essas duas operações satisfazem os axiomas de espaço vetorial. O ponto $0 = (0, 0, 0)$ é denominado origem de $\mathbb{R}^3$

Definição 2 *Sejam x, y, z as funções de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tais que, para cada ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$,*

$$x(p) = p_1 \quad y(p) = p_2 \quad z(p) = p_3\ .$$

Essas funçõesx, y, z chamam-se funções coordenadas naturais de $\mathbb{R}^3$.

Também se usa a notação x_1, x_2, x_3.
Vale, então, a identidade

$$p = (x_1(p), x_2(p), x_3(p))$$

Definição 3 *Uma função real f sobre $\mathbb{R}^3$ ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) é diferenciável (ou de classe C^∞) se todas as derivadas parciais de f, de todas as ordens, existirem e forem contínuas.*

Se f e g são funções reais diferenciáveis, $f+g$ e fg são também diferenciáveis. Comentário A diferenciação é uma operação local: para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ em $p \in \mathbb{R}^3$ basta saber os valores de f para todos os $q \in \mathbb{R}^3$ suficientemente próximos de p. Por isso a definição acima é excessivamente restritiva. O domínio de f pode ser um aberto que contenha p (e não necessariamente todo o $\mathbb{R}^3$).

2 Vetores Tangentes

Definição 4 *Um vetor tangente v_p de $\mathbb{R}^3$ consiste de dois pontos de $\mathbb{R}^3$: a parte vetorial v e o ponto de aplicação p. v_p é sempre representado pela flexa do ponto p ao ponto $p+v$. É importante ressaltar que dois vetores tangentes, v_p e w_q, são iguais, $v_p = w_q$, se e só se $v = w$ e $p = q$; ou seja, além da igualdade das partes vetoriais, requer-se a igualdade dos pontos de aplicação. Vetores com a mesma parte vetorial e pontos de aplicação diferentes são ditos paralelos. Esta conceituação de vetores tangentes é comum na física, onde o ponto de aplicação de uma força é essencial.*

Definição 5 *Seja p um ponto de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $T_p(\mathbb{R}^3)$ de todos os vetores que têm p como ponto de aplicação é chamado de espaço tangente a $\mathbb{R}^3$ em p.*

Definição 6 *Um campo vetorial V em $\mathbb{R}^3$ é uma função que associa a cada ponto p de $\mathbb{R}^3$ um vetor tangente $V(p)$ a $\mathbb{R}^3$, em p.*

Existe uma álgebra natural para campos vetoriais:

$$\begin{aligned}(V+W)(p) &= V(p)+W(p) \\ (fV)(p) &= F(p)V(p)\end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Definição 7 *Sejam U_1, U_2, U_3 campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$\begin{aligned}U_1(p) &= (1,0,0)_p \\ U_2(p) &= (0,1,0)_p \\ U_3(p) &= (0,0,1)_p\end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Chamamos U_1, U_2, U_3 de referencial natural de $\mathbb{R}^3$. U_i ($i = 1, 2, 3$) é um conjunto de vetores unitários na direção x_i.

Lema 1 *Se V é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, existem três (e só três) funções reais v_1, v_2, v_3 em $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3$$

As funções v_1, v_2, v_3 são denominadas funções coordenadas euclideanas de V.

Prova $V : p \mapsto V(p)$ vetor tangente. A parte vetorial de $V(p)$ pode ser descrita como $(v_1(p), v_2(p), v_3(p))$ que, ponto a ponto, define as funções v_1, v_2, v_3. Mas

$$\begin{aligned} V(p) &= (v_1(p), v_2(p), v_3(p)) \\ &= v_1(p)(1,0,0)_p + v_2(p)(0,1,0)_p + v_3(p)(0,0,1)_p \\ &= v_1(p)U_1(p) + v_2(p)U_2(p) + v_3(p)U_3(p) \end{aligned}$$

Logo,

$$V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3$$

Cálculos com campos vetoriais podem sempre ser expressos em termos de suas funções coordenadas euclideanas. Por exemplo, a adição e a multiplicação por uma função são dados por

$$\sum_i v_i U_i + \sum_i w_i U_i = \sum_i (v_i + w_i) U_i$$

$$f\left[\sum_i v_i U_i\right] = \sum_i [f v_i] U_i$$

Esta última equação significa que, em um ponto arbitrário p, teremos

$$\left\{ f \left[\sum_i v_i U_i \right] \right\} (p) = \sum_i \left(f(p) v_i(p) \right) U_i(p)$$

Um campo vetorial V é *diferenciável* se suas funções coordenadas euclideanas forem diferenciáveis.

3 Derivadas direcionais

Associada a cada vetor tangente $v_p \in \mathbb{R}^3$ está a reta

$$t \mapsto p + tv$$

Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$, e considere a função

$$t \mapsto f(p + tv) \ ,$$

que é uma função diferenciável na reta real. É claro que a derivada desta função de t, em $t = 0$, nos diz como f varia ao longo da reta que tem a direção de v.

Definição 8 *Seja $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciável, seja v_p um vetor tangente a $\mathbb{R}^3$. O número*

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}\left(f(p + tv)\right)_{t=0}$$

é a derivada de f em relação a v_p. Outra denominação usada é a de derivada direcional na direção de v_p.

Exemplo:

$$\begin{aligned}
f &= x^2yz \\
p &= (1, 1, 0) \\
v &= (1, 0, -3) \\
p + tv &= (1 + t, 1, -3t) \\
f(p + tv) &= (1 + t)^2.1.(-3t) = -3t - 6t^2 - 3t^3
\end{aligned}$$

e então

$$\frac{d}{dt}\left(f(p + tv)\right) = -3 - 12t - 9t^2$$

Para $t = 0$,

$$v_p[f] = -3$$

O cálculo de $v_p[f]$ pode ser reduzido ao cálculo das derivadas parciais no ponto p, como mostram os lemas a seguir.

Lema 2 *Se $v_p = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor tangente a $\mathbb{R}^3$, então*

$$v_p[f] = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Prova

$$\begin{aligned}
f(p+tv) &= f(p_1+tv_1, p_2+tv_2, p_3+tv_3) \\
\frac{d}{dt}(p_i+tv_i) &= v_i \\
v_p[f] &= \frac{d}{dt}\left(f(p+tv)\right)_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i
\end{aligned}$$

As principais propriedades dessa derivada direcional são:

Teorema 1 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, v_p e w_p vetores tangentes, a e b, números. Então,*

$$\begin{array}{ll}
(1) & (av_p + bw_p)[f] = av_p[f] + bw_p[f] \\
(2) & v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g] \\
(3) & v_p[fg] = v_p[f].g(p) + f(p).v_p[g]\ .
\end{array}$$

A demonstração é imediata.

As primeiras duas propriedades podem ser sumarizadas assim: $v_p[f]$ é linear em v_p e em f. A terceira é a propriedade de Leibnitz. Todos os tipos de derivação que vamos encontrar têm essa característica: linearidade e Leibnitz.

Dado um campo vetorial V e uma função f, podemos falar na função $V[f]$. De fato, em cada ponto p essa função tem o valor $V_p[f]$, ou seja, a derivada de f em relação ao vetor tangente $V(p)$.

Seja U_1, U_2, U_3 o campo de referenciais naturais em $\mathbb{R}^3$. Lembrando que

$$\begin{aligned}
U_{1\,p} &= (1,0,0)_p && (1) \\
U_{2\,p} &= (0,1,0)_p && (2) \\
U_{3\,p} &= (0,0,1)_p && (3)
\end{aligned}$$

temos, evidentemente, que $U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Por exemplo:

$$U_1(p)[f] = \frac{d}{dt}\left(f(p_1+t, p_2, p_3)\right)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)$$

Corolário 1 *Sejam V e W campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ e f, g, h funções reais ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).*

$$\begin{array}{ll} 1. & (fV + gW)[h] = fV[h] + gW[h] \\ 2. & V[af + bg] = aV[f] + bV[g] \\ 3. & V[fg] = V[f].g + fV[g] \end{array}$$

A demonstração é simples. Exemplo:

$$V(p)[fg] = V(p)[f].g(p) + f(p)[g]$$

ou seja:

$$V[fg](p) = V[f].g(p) + fV[g](p)$$

Para simplificar a notação, nem sempre vamos escrever o ponto de aplicação de um vetor v_p.

4 Curvas em $\mathbb{R}^3$

Definição 9 *Uma curva em $\mathbb{R}^3$ é uma função diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.*

A função α pode ser escrita como $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Ser diferenciável quer dizer-então que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são diferenciáveis.

Exemplo 1. Reta. É a curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(t) = p + tq = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3)$$

com $q \neq 0$, é a reta passando por p na direção q.
2. Hélice. A curva $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, 0)$ é um círculo de raio $a > 0$ no plano xy de $\mathbb{R}^3$. Uma hélice é obtida tmando-se a curva

$$t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$$

com $a > 0$ e $b \neq 0$.

Definição 10 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva em $\mathbb{R}^3$ com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Para cada $t \in I$, o* vetor velocidade *de α em t é o vetor tangente*

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

no ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$.

Definição 11 *Seja* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva. Se* $h : J \to I$ *é uma função diferenciável em um intervalo aberto* J*, então a função composta*

$$\beta = \alpha(h) : J \to \mathbb{R}^3$$

é uma curva denominada reparametrização de α *por* h*.*

Lema 3 *Se* β *é uma reparametrização de* α *por* h*, então*

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s).\alpha'(h(s))$$

Dem.: Escrevendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, temos

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s)))$$

Mas $g(f(s))' = g'(f(s)).f'(s)$, logo,

$$\beta'(s) = (\alpha_1'(h(s)).h'(s), \alpha_2'(h(s).h'(s), \alpha_3'(h(s).h'(s)$$

$$= h'(s).\left(\alpha_1'(h(s)), \alpha_2'(h(s)), \alpha_3'(h(s))\right)$$

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s).\alpha'(h(s))$$

quod erat demonstrandum.

Lema 4 *Seja* α *uma curva em* $\mathbb{R}^3$ *e seja* f *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}^3$*. Então,*

$$\alpha'(t)[f] = \frac{df(\alpha)}{dt}(t)$$

Prova: como

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}\right)_{\alpha(t)}$$

e como vimos que

$$\vec{v}_p[f] = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$$

temos

$$\alpha'(t)[f] = \alpha'(t)_{\alpha(t)}[f] = \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))$$

Ora, $f(\alpha)$ pode ser escrita $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Logo,

$$\frac{df(\alpha)}{dt}(t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\frac{d\alpha_i}{dt}(t)$$

Portanto,

$$\alpha'(t)[f] = \frac{sf(\alpha)}{dt}(t)$$

Comentário:$\alpha'(t)[f]$ é a taxa de variação de f ao longo da linha por $\alpha(t)$, na direção $\alpha'(t)$. O lema mostra que esta taxa é a mesma que a da variação de f ao longo da curva α.

5 1-Formas

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Elementarmente usa-se definir a diferencial de f como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

sem esclarecer o que esta expressão formal significa. A seguir daremos um significado preciso à noção de diferencial de uma função.

Definição 12 *Uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$ é uma função real ϕ (isto é, a valores reais) sobre o conjunto dos vetores tangentes a $\mathbb{R}^3$, tal que ϕ é linear em cada ponto, isto é,*

$$\phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w)$$

para quaisquer números a, b e quaisquer vetores tangentes $\vec{v}, w$ em um ponto arbitrário de $\mathbb{R}^3$.

Assim, dada ϕ, $\phi(v)$ é um número. No ponto $\vec{p}$, ponto de aplicação de v, a função

$$\phi_p : T_p(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

é linear. Então, em cada ponto $\vec{p}$, ϕ_p é um elemento do espaço dual de $T_p(\mathbb{R}^3)$. Neste sentido, a noção de 1-forma é dual à de campo vetorial.

A soma de 1-formas ϕ e ψ é definida ponto-a-ponto:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v)$$

para todo v em $T_p(\mathbb{R}^3)$. De modo semelhante, se f é uma função real em $\mathbb{R}^3$ e ϕ é uma 1-forma, então a 1-forma $f\phi$ é definida assim:

$$(f\phi)(v_p) = f(\vec{p})\phi(v_p)$$

para todos os vetores tangentes v_p.

Daí decorre uma maneira natural para calcular a ação de uma 1-forma ϕ sobre um campo vetorial V, dando uma função real $\phi(V)$:

$$(\phi(V))\,(\vec{p}) = \phi\,(V(\vec{p}))$$

Pode-se então interpretar também uma 1-forma como uma máquina que converte campos vetoriais em funções reais. Diz-se que ϕ é diferenciável quando $\phi(V)$ é diferenciável para qualquer V diferenciável. A partir de agora vamos sempre supor que as 1-formas, bem como os campos vetoriais, são diferenciáveis. As seguintes propriedades da linearidade valem:

$$\begin{aligned} \phi(fV + gW) &= f\phi(V) + g\phi(W) \\ (f\Phi + g\psi)(V) &= f\phi(V) + g\psi(V) \end{aligned}$$

onde f e g são funções.

Usando a noção de derivada direcional vamos introduzir agora uma maneira muito importante de construir !-formas a partir de funções.

Definição 13 *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável. A* <u>*diferencial*</u> *df de f é uma 1-forma tal que*

$$df(v_p) = v_p[f]$$

para todos os vetores tangentes v_p.

<u>Comentário</u>: A df assim definida é efetivamente uma 1-forma, pois é uma função a valores reais sobre os vetores tangentes e que, pela parte (1) do teorema 3.3, é linear em cada ponto $\vec{p}$. Note-se que df sabe como f varia em todas as direções de $\mathbb{R}^3$, o que dá uma medida de sua potência.

Exemplos 1-formas em $\mathbb{R}^3$.

(1) As diferenciais dx_1,dx_2,dx_3 das funções coordenadas naturais.

$$dx_i(v_p) = v_p[x_i] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\vec{p}) = \sum_j v_j \delta_{ij} = v_i$$

Assim, o valor de dx_i em um vetor tangente arbitrário v_p é a i-ésima componente v_i de sua parte vetorial.
(2) A 1-forma $\psi = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3$

$$\begin{aligned}\psi(v_p) &= f_1(\vec{p})dx_1(v_p) + f_2(\vec{p})dx_2(v_p) + f_3dx_3(v_p)\\ &= f_1(\vec{p})v_1 + f_2(\vec{p})v_2 + f_3(\vec{p})v_3\\ \psi(v_p) &= \sum f_i(\vec{p})v_i\end{aligned}$$

(3) Em particular, tomando como vetores os U_{ip}, temos

$$dx^j(U_{ip}) = \delta_i^j$$

e, assim, dx_1,dx_2,dx_3 formam a base dual de U_1, U_2,U_3, que é a base natural de $\mathbb{R}^3$.

Lema 5 *Se ϕ é uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, então $\phi = \sum f_i dx_i$, onde $f_i = \phi(U_i)$. Essas funções f_1, f_2, f_3, são chamadas funções coordenadas euclideanas de ϕ.*
Dem.: Um vetor tangente genérico pode ser escrito

$$v_p = \sum v_i U_i(\vec{p})$$

logo,

$$\phi(v_p) = \phi(\sum v_i U_i(\vec{p})) = \sum v_i \phi(U_i(\vec{p})) = \sum v_i f_i(\vec{p})$$

onde denotamos $\phi(U_i(\vec{p}))$ por $f_i(\vec{p})$. Mas

$$\left(\sum f_i dx_i\right)(v_p) = \sum_i f_i(\vec{p})dx_i(v_p) = \sum_i f_i(\vec{p})v_i$$

logo, $\phi = \sum_i f_i dx_i$, onde $f_i(\vec{p}) = \phi(U_i(\vec{p}))$.

Este lema mostra que uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$ não é senão uma expressão $fdx + gdy + hdz$, onde os dx_i são precisamente definidos.

Corolário 2 *Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Então,*

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Dem.:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx(v_p) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})v$$

Ora,

$$df(v_p) = v_p[f] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})v^i$$

o que demonstra o corolário.

6 Formas diferenciais

As 1-formas são membros de uma família maior, a das formas diferenciais. Existem 2-formas, 3-formas, etc. De uma maneira informal, uma forma diferencial é uma soma de termos da forma $fdx_i dx_j$, ou $gdx_i dx_j dx_k$, onde o produto das diferenciais satisfaz a regra de alternação:

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i \quad (1 \leq i\ , j \leq 3)$$

Como conseqüência desta regra, temos

$$dx_i dx_i = 0$$

Catálogo:

0-forma: f (função diferenciável)
1-forma: $fdx + gdy + hdz$
2-forma: $fdxdy + gdxdz + hdydz$
3-forma: $fdxdydz$

Em $\mathbb{R}^3$ não há outros tipos de formas. Vamos introduzir operações envolvendo formas. Já sabemos somar 1-formas:

$$\sum_i f_i dx_i + \sum_i g_i dx_i = \sum_i (f_i + g_i) dx^i$$

Adições correspondentes existem para 2-formas e 3-formas.
Multiplicação de formas: se faz usando a regra da alternação. Para ressaltar as propriedades desse produto especial, vamos passar a denotar o produto $dxdy$, por exemplo, por $dx \wedge dy$.

Exemplo
(1) Sejam

$$\phi = xdx - ydy$$

$$\psi \quad = \quad zdx + xdz$$

Então,

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi &= (xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz) \\
&= xzdx \wedge dx + x^2 dx \wedge dz - yzdy \wedge dx - yxdy \wedge dz \\
&= x^2 dx \wedge dz - yzdy \wedge dx - yxdy \wedge dz \\
&= x^2 dx \wedge dz + yzdx \wedge dy - yxdy \wedge dz
\end{aligned}$$

De uma maneira geral, o produto de duas 1-formas é uma 2-forma.

(2) Sejam ϕ e ψ como acima, e $\theta = zdy$. Então

$$\begin{aligned}
\theta \wedge \phi \wedge \psi &= zdy \wedge (x^2 dx \wedge dz + yzdx \wedge dy - yxdy \wedge dz) \\
&= x^2 zdy \wedge dx \wedge dz + z^2 ydy \wedge dx \wedge dy - xyzdy \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Mas $dy \wedge dx \wedge dy = -dy \wedge dy \wedge dx = 0$ e $dy \wedge dy \wedge dz = 0$ Logo,

$$\theta \wedge \phi \wedge \psi = -x^2 zdx \wedge dy \wedge dz$$

Seja ϕ como acima, e seja η a 2-forma $ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$. Temos

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (ydx \wedge dz + xdy \wedge dz) \\
&= yxdx \wedge dx \wedge dz + x^2 dx \wedge dy \wedge dz - y^2 dy \wedge dx \wedge dz - yxdy \wedge dy \wedge dz \\
&= x^2 dx \wedge dy \wedge dz - y^2 dy \wedge dx \wedge dz \\
&= (x^2 + y^2) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Lema 6 *Se ϕ e ψ são 1-formas, então*

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$$

Dem: Trivial.

Definição 14 *Se $\phi = \sum_i f_i dx^i$ é uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, a derivada exterior de ϕ é a 2-forma*

$$d\phi = \sum_i df_i \wedge dx^i$$

onde df_i é a diferencial da função f_i.

Seja $\phi = f_1 dx_1 + f_2 dx^2 + f_3 v dx^3$. Então,

$$d\phi = df_1 \wedge dx^1 + df_2 \wedge dx^2 + df_3 \wedge dx^3$$

Mas,

$$\begin{aligned}
df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3}dx^3 \\
df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3}dx^3 \\
df_3 &= \frac{\partial f_3}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}dx^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\phi &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^1 + \\
&+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^3
\end{aligned}$$

Expandindo e levando em conta as regras do produto exterior, temos

$$d\phi = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3$$

Teorema 2 *Sejam f e g funções, ϕ e ψ 1-formas.*
(1) $d(fg) = (df)g + f(dg)$
(2)$d(fg) = df \wedge \phi + f d\phi$
(3)$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$

Dem: (1) e (2) são muito simples e ficam como exercícios.
(3) É suficiente provar a fórmula para $\phi = f d\mu$ e $\psi = g d\nu$, onde μ e ν são quaisquer das coordenadas x_1, x_2, x_3. Por exemplo, $\phi = f dx$, $\psi = g dy$. Então,

$$\begin{aligned}
d(\phi \wedge \psi) &= d(fg dx \wedge dy) \\
&= \frac{\partial (fg)}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial (fg)}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial (fg)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \frac{\partial (fg)}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z}\right] dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} d\phi \wedge \psi &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx\right) \wedge g dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} g dz \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi \wedge d\psi &= f dx \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy\right) \\ &= f \frac{\partial g}{\partial z} dx \wedge dz \wedge dy \\ &= -f \frac{\partial g}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

o que prova (3).

7 Aplicações, ou mapeamentos

Nesta seção discutimos funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. A observação fundamentalsobre a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é que ela pode ser completamente descrita por m funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definição 15 *Dada uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sejam $f_1, \ldots f_m$ funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$, tais que*

$$F(\vec{p}) = \Big(f_1(\vec{P}), f_2(\vec{p}), ..., f_m(\vec{p})\Big)$$

para todo $\vec{p}$ de $\mathbb{R}^n$.

Essas funções chamam-se funções coordenadas euclideanas de F, e é costume escrever-se: $F = (f_1, f_2, ..., f_m)$.

A função F é diferenciável se suas funções coordenadas o forem. Uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é chamada de mapeamento de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Note que $f_i = x_i \circ F$.

Definição 16 *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é um mapeamento, então a função composta $\beta = F(\alpha) : I \to \mathbb{R}^m$ é uma curva em $\mathbb{R}^m$ denominada <u>imagem de α sob F</u>.*

Exemplo
(1) Considere o mapeamento $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$F = (x - y, x + y, 2z)$$

ou, mais precisamente,

$$F : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, 2z).$$

Este mapeamento é muito simples porque é linear. Neste caso é sabido que F é completamente determinado pelos seus valores em três pontos linearmente independentes, como, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u_1} &= (1, 0, 0) \\
\mathbf{u_2} &= (0, 1, 0) \\
\mathbf{u_3} &= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

(2) O mapeamento $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

onde u e v são as funções coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Para analisar este mapeamento, vamos examinar o seu efeito sobre a curva

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Esta curva descreve, em sentido antihorário, um arco de círculo de raio r com centro na origem. A curva imagem é

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= F(\alpha(t)) = F(r \cos t, r \sin t) \\
&= \left(r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t, 2r^2 \cos t \sin t\right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta(t) = \left(r^2 \cos 2t, r^2 \sin 2t\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Esta curva descreve dois arcos de círculo, em sentido antihorário, em torno da origem e de raio r^2.

Em linhas gerais, o cálculo diferencial aproxima objetos contínuos por objetos lineares. Nesta linha, dado um mapeamento $F : \mathbb{R}^n \rightarrow$, vamos definir uma aproximação linear para ele, perto de um ponto $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$.

É possível atingir todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ através de retas $\alpha(t) = \vec{p} + tv$, partindo de $\vec{p}$ e escolhendo adequadamente v e t. Da mesma forma $\mathbb{R}^n$ pode ser "varrido" pelas imagens de α por F, ou seja,

$$\beta(t) = F(\vec{P} + tv)$$

começando em $F(\vec{p})$. Vamos aproximar F nas vizinhanças de $\vec{p}$ pelo mapeamento F_*, que leva cada velocidade inicial $\alpha'(0) = v_p$ na velocidade inicial $\beta'(0)$.

Definição 17 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow$ um mapeamento. Seja v_p um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em $\vec{p}$, e denotemos por $F_*(v)$ a velocidade inicial da curva*

$$t \mapsto F(\vec{p} + tv)$$

A função resultante F_* leva vetores tangentes a $\mathbb{R}^n$ em vetores tangentes a , e é chamada <u>*mapeamento tangente*</u> *de F.*

Proposição 1 *Seja $F = (f_1, f_2, ...f_m)$ um mapeamento de $\mathbb{R}^n$ em . Se v é um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em $\vec{p}$, então*

$$F_*(v) = (v[f_1], ..., v[f_m]) \quad em \quad F(\vec{p})$$

<u>Prova</u>: Vamos tomar $m = 3$ para fixar as idéias. Então

$$\beta(t) = F(\vec{p} + tv) = (f_1(\vec{p} + tv), f_2(\vec{p} + tv), f_3(\vec{p} + tv))$$

Por definição, $F_*(v) = \beta'(0)$. Para obter $\beta'(0)$, derivamos, em $t = 0$, as funções coordenadas de β. Mas

$$\frac{d}{dt}\left(f_i(\vec{p} + tv)\right)_{t=0} = v[f_i]$$

Logo,

$$F_*(v) = (v[f_1], v[f_2], v[f_3])_{\beta=0}$$

e $\beta(0) = F(\vec{p})$.

Corolário 3 *Se $F : \mathbb{R}^n \to$ é um mapeamento, então em cada ponto $\vec{p}$ de $\mathbb{R}^n$, o mapeamento tangente*

$$F_{*\,p} : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{F(p)}()$$

é uma transformação linear.

<u>Prova</u>: Temos que mostrar que, para v, w, a, b arbitrários,

$$F_*(av + bw) = aF_*(v) + bF_*(w)$$

$$\begin{aligned} F_8(av + bw) &= ((av + bw)[f_1], ...(av + bw)[f_m]) \\ &= (av[f_1] + bw[f_1], ..., av[f_m] + bw[f_m]) \\ &= a\,(v[f_1], ...v[f_m]) + b\,(w[f_1], ..., w[f_m]) \\ &= aF_*(v) + bF_*(w) \end{aligned}$$

De fato, o mapeamento tangente $F_{*\,p}$ em $\vec{p}$ é a transformação linear que melhor aproxima F nas vizinhanças de $\vec{p}$.

Corolário 4 *Seja $F : \mathbb{R}^n \to$ um mapeamento. Se $\beta = F(\alpha)$ é a imagem da curva α em $\mathbb{R}^n$, então $\beta' = F_*(\alpha')$.*

<u>Prova</u>:

$$\begin{aligned} m &= 3 \\ F &= F(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha)) \\ F_*(\alpha') &= (\alpha'[f_1], \alpha'[f_2], \alpha'[f_3]) \end{aligned}$$

Mas

$$\alpha'[f_i] = \frac{df_i(\alpha)}{dt}\ ,$$

logo,

$$F_*(\alpha') = \left(\frac{df_1(\alpha)}{dt}(t), \frac{df_2(\alpha)}{dt}(t), \frac{df_3(\alpha)}{dt}(t)\right)_{\beta(t)} = \beta'(t)$$

Sejam $\{U_j\}$, $(1 \le j \le n)$ e $\{\overline{U}_i\}$, $(1 \le i \le m)$ os referenciais naturais de $\mathbb{R}^n$ e respectivamente. Então,

Corolário 5 *Se $F = (f_1, ..., f_m)$ é um mapeamento de $\mathbb{R}^n$ em , então*

$$F_* \left(U_j(\vec{p})\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{p})\overline{U}_i \left(F(\vec{p})\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

<u>Dem</u>: Imediata, lembrando que $U_i[f_j] = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Seja V um espaço vetorial, com base $\{e_i\}$. Seja W um outro espaço vetorial, com base $\{f_i\}$. Seja $T : V \to W$ linear. Chama-se <u>elementos de matriz</u> de T em relação às bases $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ os números T_{ji} na equação

$$TE_i = \sum_j T_{ji} f_j$$

Logo, o Corolário 7.8 nos diz que, se $F(f_1, ..., f_m)$, os elementos de matriz de f_* em relação aos referenciais naturais de $\mathbb{R}^n$ e são, no ponto $\vec{p}$, os números $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(\vec{p})$. Ou seja, a matriz que representa a transformação linear F_* nessas bases é a matriz jacobiana da função F. Isto nos sugere outro nome para F_*: derivada de F.

Definição 18 *Um mapeamento $F : \mathbb{R}^n \to$ é <u>regular</u> se, para todo $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, o mapeamento tangente F_{*p} for $(1-1)$ (injetor).*[1]

Como mapeamentos tangentes são lineares, segue diretamente da álgebra linear que as seguintes condições são equivalentes:
(1) F_{*p} é injetora.
(2) $F_*(v_p) = 0 \Rightarrow v_p = 0$
(3) A matriz jacobiana de F em $\vec{p}$ tem posto n (que é a dimensão de $\mathbb{R}^n$).

A seguinte propriedade de transformações lineares $T : V \to W$ será útil:se os espaços vetoriais V e W têm a mesma dimensão, então T é injetora se e só se ela for sobrejetora.

Um mapeamento que tem um mapeamento inverso é chamado de <u>difeomorfismo</u>. Lembre-se de que estamos exigindo de um mapeamento que seja diferenciável. Quando considerarmos aplicações mais gerais, um difeomorfismo será uma aplicação diferenciável que possui uma inversa também diferenciável.

[1]Uma aplicação é injetora se $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$.

Teorema 3 *Seja $F : \mathbb{R}^n \to$ um mapeamento entre espaços euclideanos de mesma dimensão. Se F_{*p} é injetora em um ponto $\vec{p}$, existe um aberto $\mathcal{A}$ contendo $\vec{p}$ tal que a restrição de F a $\mathcal{A}$ é um difeomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre um aberto $\mathcal{B}$.*

Este teorema, de demonstração difícil, é chamado de <u>teorema da função inversa</u>.

Definição 19 *Funções tangentes.*

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto; x_0 um ponto de A e

$$f, g : A \to$$

contínuas em A. Diz-se que f e g são <u>tangentes</u> em x_0 se
(1)$f(x_0) = g(x_0)$
(2)$lim_{x \to x_0; x \neq x_0} \frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$
onde $\|z\|$ é a norma do vetor z (por exemplo, a norma euclideana).

O nome se justifica. Tomemos, para simplificar, o caso em que $n = m$. Então o limite da definição diz que, se f e g são tangentes em x_0, teremos, próximo a x_0,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)a \\ g(x) &= g(x_0) + (x - x_0)b \end{aligned}$$

e, para que $\frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$, é preciso que $a = b$. Ou seja, nas vizinhanças de x_0, as funções tangentes diferem só a partir da segunda ordem em $\|x - x_0\|$.

Teorema 4 *Suponhamos que, dentre as funções tangentes, em x_0, à função f, existam duas funções lineares, u_1 e u_2. Isto é, suponhamos que*

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x_0) + u_1(x - x_0) \\ x &\mapsto f(x_0) + u_2(x - x_0) \end{aligned}$$

sejam tangentes a f em x_0. Então, $u_1 = u_2$.

Prova:
(1)u_1 é tangente a u_2 (trivial).
(2) Temos, então,

$$\begin{aligned} lim_{x\to x_0;\, x\neq x_0}\frac{\|f(x_0)+u_1(x-x_0)-f(x_0)-u_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} &= 0 \\ lim_{x\to x_0;\, x\neq x_0}\frac{\|(u_1-u_2)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} &= 0 \end{aligned}$$

Introduzo $y = x - x_0$ e $v = u_1 - u_2$. Então,

$$lim_{y\to 0;\, y\neq 0}\frac{\|v(y)\|}{\|y\|} = 0$$

Isto quer dizer que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que, se $\|y\| \leq r$,

$$\|v(y)\| < \epsilon\|y\| \tag{4}$$

Considere a seguinte escolha de y:

$$y = r\frac{x}{\|x\|}$$

onde x é um vetor não-nulo qualquer. Temos

$$\begin{aligned} \|y\| &= \frac{r}{\|x\|}\|x\| = r \leq r \\ v(y) &= \frac{r}{\|x\|}v(x) \end{aligned}$$

e a Eq.(4) vale. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{r}{\|x\|}\|v(x)\| &< \epsilon r \\ \|v(x)\| < \epsilon\|x\| \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{\|v(x)\|}{\|x\|} < \epsilon$$

para ϵ arbitrário e para todo $x \neq 0$. Para $x = 0$, temos $v(x) = 0$. Para x não-nulo, a desigualdade de cima exige $v(x) = 0$.[2] Logo, $v(x) = 0$ para todo x. Segue que $v = 0$, ou, $u_1 = u_2$. Em conseqüência a aplicação linear tangente a uma função contínua em x_0, se existir, é única.

[2]Pois o primeiro membro é menor do que qualquer ϵ, logo é zero. Mas o denominador é não-nulo, logo o numerador tem de ser zero.

Definição 20 *Dizemos que uma aplicação contínua f de $A \subset \mathbb{R}^n$ em é diferenciável no ponto $x_0 \in A$ se existir uma aplicação linear u de $\mathbb{R}^n \rightarrow$ tal que $x \mapsto f(x_0) + u(t = t_0)$ seja tangente a f em x_0. Acabamos de ver que esse mapeamento, quando existe, é único. u é denominado* <u>*derivada*</u> *de f no ponto x_0, e é denotado por $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$.*

<u>Exemplos:</u>
1.A aplicação $(x, y) \mapsto x$, de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ é diferenciável. Por que? Qual é a sua diferencial?
A função pode ser escrita $f(x, y) = x$. Ela é linear, pois

$$\begin{aligned} f[(x,y) + (\overline{x},\overline{y})] &= f[(x+\overline{x}, y+\overline{y})] = x + \overline{x} = f(x,y) + f(\overline{x},\overline{y}) \\ f[\lambda(x,y)] &= f[(\lambda x, \lambda y)] = \lambda x = \lambda f(x,y) \end{aligned}$$

Como f é linear, ela coincide com a derivada. Então, $Df = f$.
2.$(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$. Determinar a diferencial.

$$\begin{aligned} \| \left((x+h)^2, (y+k)^2\right) - (x^2, y^2) - u(h,k)\| &= \\ \|(x^2 + 2hx + h^2, y^2 + 2kx + k^2) - (x^2, y^2) - u(h,k)\| = &= \\ \|(2hx + h^2, 2ky + k^2) - u(h,k)\| & \end{aligned}$$

Para ser mais explícito, vou denotar u por $u_{(x,y)}$. Considere a aplicação

$$u_{(x,y)}.(h,k) = (2xh, 2yk)$$

Então temos

$$\|(2hx + h^2, 2ky + k^2) - (2xh, 2yk)\| = \|(h^2, k^2)\| = \sqrt{h^4 + k^4}$$

Para que $u_{(x,y)}$ seja a derivada de f em (x, y) devemos ter

$$\|f(x+h, y+k) - f(x,y) - u_{(x,y)}(h,k)\| \leq \epsilon\sqrt{h^2 + k^2}$$

ou seja, que

$$\sqrt{H^4 + k^4} \leq \sqrt{h^2 + k^2}$$

nolimite em que $\sqrt{h^2 + k^2}$ é suficientemente pequeno. Isto é claramente possível, pois, para h e k suficientemente pequenos,

$$\sqrt{h^4 + k^4} < \sqrt{h^2 + k^2}$$

Resta verificar, o que é muito simples e pode ser feito pelo leitor, que $u_{(x,y)}$ é linear. Uma vez que $u_{(x,y)}.(h, k) = (2xh, 2yk)$ é linear, podemos calcular seus elementos de matriz. Estes são obtidos aplicando $u_{(x,y)}$ aos vetores de base de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} u_{(x,y)}(1,0) &= 2x \\ u_{(x,y)}(0,1) &= 2y \end{aligned}$$

Note-se que $f(x,y) = (x^2, y^2) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, logo,

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 \\ f_2(x,y) &= y^2 \end{aligned}$$

The partial derivatives of f_1 and f_2 are given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Como podemos escrever

$$\begin{aligned} u_{(x,y)}.(1,0) &= 2x(1,0) + 0(0,1) \\ u_{(x,y)}.(0,1) &= 0(1,0) + 2y(0,1) \end{aligned}$$

segue, usando os valores das derivadas parciais, que

$$\begin{aligned} u_{(x,y)}(1,0) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1) \\ u_{(x,y)}(0,1) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,1) \end{aligned}$$

de onde fica claro que as derivadas parciais são os elementos de matriz de $u_{(x,y)}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto e^x$

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - u_x.h\| &= \|e^{x+h} - e^x - u_x.h\| \\ &= \|e^x(1+h) - e^x - u_x.h\| \\ &= \|e^x + he^x - e^x - u_x.h\| \\ &= \|he^x - u_x.h\| \end{aligned}$$

Para que isto se anule devemos ter

$$u_x.h = e^x.h$$

ou seja, a derivada de e^x é a função linear

$$h \mapsto e^x.h$$

Normalmente dizemos que a derivada da função $x \mapsto e^x$ no ponto x é o número e^x. Isto não é inconsistente. De fato, no espaço vetorial $\mathbb{R}$, de uma dimensão, seja U_1 o vetor da base natural (neste caso, U_1 é o número real 1!), e T uma aplicação linear qualquer. Seja $v = vU_1$ um vetor de $\mathbb{R}$. Denotemos $T(U_1)$ por f. Temos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(vU_1) = vT(U_1) = vf = vfU_1 = fvU_1 = fv \\ T(w) &= T(wU_1) = wT(U_1) = wf = wfU_1 = fwU_1 = fw \end{aligned}$$

ou seja, uma aplicação linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consiste sempre em multiplicar o vetor sobre o qual ela atua por um número, característico da aplicação, podendo-se então identificar cada aplicação linear com um número. Na análise clássica chama-se a esse número de derivada.

Teorema 5 *(Continuidade de uma aplicação linear). Sejam E e F espaços vetoriais com normas definidas e u uma aplicação linear de E em F. Afim de que u seja contínua, é necessário e suficiente que exista $a > 0$ tal que, para todo $x \in E$,*

$$\|u(x)\| \leq a\|x\|$$

Dem;Elon Lages Lima, [1]

Teorema 6 *Se a aplicação contínua f de $A \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $x_0 \in A$, a derivada $f'(x_0)$ é uma aplicação linear contínua de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Dem:A continuidade de f significa que, dado $\epsilon > 0$, existe $r \in [0,1]$ tal que

$$\|t\| \leq \Rightarrow \|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

A diferenciabilidade em x_0 exige que, nas mesmas condições,

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|t\|$$

Ora,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| = \|u(t) - f(x_0 + t) + f(x_0) + f(x_0 + t) - f(x_0)\| &\leq \\ \leq \|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\| + \|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \end{aligned}$$

logo,

$$\|u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|t\| + \frac{\epsilon}{2}$$

e, tomando o máximo $\|t\|$,

$$\|u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Conseqüentemente,

$$\|t\| \leq r \Rightarrow \|u(t)\| \leq \epsilon$$

Tomando $t = r\frac{x}{\|x\|}$, com $x \neq 0$ qualquer, temos $\|t\| = r \leq r$. Logo, $\|u(t)\| \leq \epsilon$. Mas

$$\|u(t)\| = \|u\left(\frac{rx}{\|x\|}\right)\| = \frac{r}{\|x\|}\|u(x)\| \leq \epsilon$$

Logo,

$$\|u(x)\| \leq \frac{\epsilon}{r}\|x\|$$

para todo x. A função u é, então, contínua.

Teorema 7 *(A regra da cadeia.)*

Sejam E,F,G três espaços vetoriais normados, A uma vizinhança aberta de $x_0 \in E$, f uma aplicação contínua de A em F, $y_0 = f(x_0)$, B uma vizinhança aberta de y_0 em F, g uma aplicação contínua de B em G. Então, se f é diferenciável em x_0 e g é diferenciável em y_0, a aplicação $h = g \circ f$ é diferenciável em x_0, e se tem

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$$

Dem:Too boring inequality juggling! (Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Parágrafo (8.2.1), pg.151.)

Part II
Análise em Variedades

8 O conceito de variedade

Definição 21 *Seja M um espaço topológico. Uma carta (V, Φ) é um homeomorfismo ϕ de um aberto V de M sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$. Duas cartas (V_1, ϕ_1) e (V_2, ϕ_2) são compatíveis se $V_1 \cap V_2 = \phi$ ou, caso contrário, se $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ e $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ forem aplicações diferenciáveis entre abertos de $\mathbb{R}^m$*

Definição 22 *Um atlas é um conjunto de cartas compatíveis que cobre M. Dois atlas são compatíveis se todas as suas cartas são compatíveis.*

Observações
1. No conjunto dos atlas de M, a relação "$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são compatíveis"é uma relação de equivalência. Então é possível agrupar os atlas em classes: todos os elementos de uma determinada classe são atlas equivalentes. Nenhum atlas de uma classe é equivalente a um atlas de outra classe.
2.A união de todos os atlas de uma dada classe de equivalência é o máximo atlas dessa classe. É denominado o atlas saturado dessa classe. Uma carta compatível com todas as cartas de um atlas $\mathcal{A}$ pertence o atlas saturado da classe de equivalência de $\mathcal{A}$.
3. As cartas mapeiam M em $\mathbb{R}^m$. Diz-se então que m é a dimensão de M.

Definição 23 *Uma variedade diferenciável M é um espaço topológico separável, metrizável, com uma classe de equivalência de atlas, ou, o que é o mesmo, com um atlas saturado.*

Exemplos

1. $M = \mathbb{R}^n$

O atlas é formado por uma única carta (V, ϕ) com
$V = M = \mathbb{R}^n$
$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a identidade, $x \mapsto x$.

2.<u>A esfera S^n</u>.
Seja $M = S^n$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^{n+1})^2 = 1$$

não é possível, neste caso, construir um atlas com uma única carta, por motivos topológicos: S^n é <u>compacto</u>, e um aberto de $\mathbb{R}^n$ não é compacto. É impossível a existência de um homeomorfismo entre um compacto e um não-compacto. São necessárias ao menos duas cartas, (V_1, ϕ_1) e (v_2, ϕ_2).
$V_1 : \{pontos \;\; de \;\; S^n : x^{n+1} > -1\}$ (esfera sem o pólo Sul.)
$v_2 : \{pontos \;\; de \;\; S^n : x^{n+1} < 1\}$ (esfera sem o pólo Norte.) $\phi_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ é definida assim:

$$\phi_1 \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) = \frac{1}{1 + x^{n+1}} \left(x^1, \ldots, x^n\right)$$

ou, mais concisamente,

$$y^i \circ \phi_1 \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) = \frac{x^i}{1 + x^{n+1}} \quad i = 1, \ldots, n \;\; ,$$

sendo y^i as funções coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$. $\phi_2 : V_2 \to \mathbb{R}^n$ é definida assim:

$$y^i \circ \phi_2 \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) = \frac{x^i}{1 - x^{n+1}} \quad i = 1, \ldots, n \; .$$

O conjunto das duas cartas claramente cobre S^n. Vamos ver se são compatíveis.

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

Temos então de verificar que

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1 \left(U_1 \cap U_2\right) \to \phi_2 \left(U_1 \cap U_2\right)$$

$$\phi_1 \left(U_1 \cap U_2\right) = \phi_2 \left(U_1 \cap U_2\right) = \{y \in \mathbb{R}^n : y \neq 0\}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \left(y^i \circ \phi_1\right)^2 \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) &= \frac{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}{)1 + x^{n+1})^2} \\ &= \frac{1 - \left(x^{n+1}\right)^2}{\left(1 + x^{n+1}\right)^2} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 + x^{n+1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y^i \circ \phi_2\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) &= \frac{x^i}{1-x^{n+1}} = \frac{1+x^{n=1}}{1-x^{n+1}} \frac{x^i}{1+x^{n+1}} \\
&= \frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n-1}} y^i \circ \phi_1\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

ou

$$
y^i \circ \phi_2\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) = \frac{y^i \circ \phi_1\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right)}{\sum_i \left(y^i \circ \phi_1\right)^2 \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right)}
$$

Como $\sum_i \left(y^i \circ \phi_1\right)^2 \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) = \parallel \phi_1(x) \parallel^2$, temos

$$
y^i \circ \phi_2(x^1, \ldots, x^{n+1}) = y^i \circ \frac{\phi_1(x^1, \ldots, x^{n+1})}{\parallel \phi_1(x) \parallel^2}
$$

ou ainda,

$$
\phi_2(x) = \frac{\phi_1(x)}{\parallel \phi_1(x) \parallel}
$$

para qualquer $x \in S^n$. Chamando $y = \phi_1(x)$ ou $x = \phi_1^{-1}(y)$, temos

$$
\phi_2\left(\phi_1^{-1}(x)\right) = \frac{\phi_1\left(\phi_1^{-1}(y)\right)}{\parallel \phi_1\left(\phi_1^{-1}(y)\right) \parallel^2}
$$

ou

$$
\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \frac{y}{\parallel y \parallel^2}
$$

que é diferenciável em $\phi_1\left(U_1 \cap U_2\right)$.

Mostrar, no caso de S^2, que as coordenadas introduzidas pelas cartas ϕ_1 e ϕ_2 são as "projeções estereográficas" ou "projeções de Mercator" a aprtir dos pólos sobre o plano equatorial.

3. Os n^2 elementos de uma matriz $n \times n$ definem um ponto no $\mathbb{R}^{n^2}$. Logo, o conjunto das matrizes reais $n \times n$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^{n^2}$, herdando sua estrutura de variedade diferenciável. O subconjunto das matrizes M inversíveis (*i.e.*, tais que $detM \neq 0$) é um aberto.

4. Dadas as variedades M_1 e M_2 é possível definir a variedade produto, $M_1 \times M_2$, com a topologia produto. Define-se a carta produto

$$
(V_1, \phi_1) \times (V_2, \phi_2) = (V_1 \times V_2, \phi_1 \times \phi_2)
$$

sendo o mapeamento $\phi_1 \times \phi_2$ definido por

$$
\phi_1 \times \phi_2 : (q_1, q_2) \mapsto (\phi_1(q_1), \phi_2(q_2))
$$

Se $dimM_1 = m$ e $dimM_2 = n$, $dim(M_1 \times M_2) = n + m$.

Definição 24 *Seja M uma variedade diferenciável, e $N \subset M$. N é uma* <u>*subvariedade*</u> *n-dimensional se, para todo $q \in N$, existe uma carta (V, q) de M, com $q \in V \subset M$ e $\phi(V) \subset \mathbb{R}^m$, tal que para todo $q' \in N \cap V$, $\phi(q') = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$.*

Exemplos:
(1) N é um aberto de M. Este é o caso trivial, com $m = n$.
(2) $M = \mathbb{R}^2$; $N = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x^1, 0)\}$

Notas:
(1) Uma subvariedade é uma variedade. Considere o N com a topologia induzida; o conjunto de cartas obtido usando-se as funções $\phi(q') = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$ como se fossem homeomorfismos entre N e $\mathbb{R}^n$, forma um atlas, uma vez que as condições de compatibilidade não são afetadas.
(2)Pode-se demonstrar o seguinte resultado: seja Y uma subvariedade de X, e Z um subconjunto de Y. Então Z é uma subvariedade de Y se e somente se Z é uma subvariedade de X.

Sabemos o que são funções diferenciáveis de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Queremos agora estender este conceito pra funções entre variedades diferenciáveis.

Definição 25 *Uma função $f : M_1 \to M_2$ é* <u>*diferenciável*</u> *se, para todas as cartas de um atlas de M_1 e todas as cartas de uma atlas de M_2, $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ é uma função diferenciável de $\mathbb{R}^{m_1}$ em $\mathbb{R}^{m_2}$, mais precisamente, de $\phi_1 \left(U_1 \cap f^{-1}(U_2)\right) \subset \mathbb{R}^{m_1}$ em $\mathbb{R}^{m_2}$.*

Aqui, $m_i = dim M_i$.

Exemplos:
(1) Se M_1 é uma subvariedade de M_2, então a injeção natural é diferenciável (porque a projeção de $\mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ é diferenciável).
(2) Sejam M_1,M_2 e M_3 variedades diferenciáveis e

$$f_2 : M_3 \to M_2 \quad ; \quad f_1 : M_2 \to M_1$$

diferenciáveis. Considere

$$f_1 \circ f_2 : M_3 \stackrel{f_2}{\to} M_2 \stackrel{f_1}{\to} M_1$$

Se f_1 e f_2 forem diferenciáveis, $f_1 \circ f_2$ também o será.
(3) Se M é a variedade produto $M_1 \times M_2$ e

$$f_1 : M_1 \to \mathbb{R} \ , \ \ f_2 : M_2 \to \mathbb{R}$$

então

$$f = f_1 \times f_2 \ , \ \ f : M \to \mathbb{R}^2$$

tal que
$$f(p,q) = (f_1(p), f_2(q))$$
será também diferenciável.
(4) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um aberto, considerado como uma variedade M_1. Seja M_2 outra variedade. Chama-se curva diferenciável em M_2 uma função diferenciável $f : I \to M_2$. Para a imagem de I em M_2, $f(I)$, usaremos o nome de trajetória.

Notas:
A definição 25 menciona um atlas. Na verdade ela é independente da escolha de atlas (da mesma classe de equivalência). De fato, seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável e (V_1, ϕ_1) e (V_2, ϕ_2) cartas de M_1 e M_2. Então,
$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$$
é diferenciável de $\mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$. Sejam agora $(V_1, \overline{\phi}_1)$ e $(V_2, \overline{\phi}_2)$ duas novas cartas, uma de M_1 e outra de M_2, respectivamente compatíveis com as cartas usadas anteriormente. O que se pode dizer de
$$\overline{\phi}_2 \circ f \circ \overline{\phi}_1^{-1} \ ?$$
Note que
$$\begin{aligned} \overline{\phi}_2 \circ f \circ \overline{\phi}_1^{-1} &= \overline{\phi}_2 \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ \overline{\phi}_1^{-1} \\ &= \left(\overline{\phi}_2 \circ \phi_2^{-1}\right) \circ \left(\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}\right) \circ \left(\phi_1 \circ \overline{\phi}_1^{-1}\right) \end{aligned}$$
e que cada termo em parênteses é diferenciável. Logo, $\overline{\phi}_2 \circ f \circ \overline{\phi}_1^{-1}$ é diferenciável. Este resultado é, na verdade, a motivação para a escolha do critério de compatibilidade de duas cartas.

Definição 26 *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $f : M_1 \to M_2$ uma bijeção. f é um difeomorfismo se tanto f quanto f^{-1} forem diferenciáveis. Então M_1 e M_2 são ditas difeomórficas.*

Exemplos:
(1) M é uma variedade de dimensão m; (U, ϕ) uma carta. Considere U como subvariedade. Então
$$\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$$
é um difeomorfismo. De fato, $\phi(U)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^m$ e, por isso, é também uma variedade. A carta (única) de $\phi(U)$ é
$$1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

ou, mais precisamente,

$$1 : \phi(U) \to \mathbb{R}^m \ .$$

Logo, a condição de diferenciabilidade diz que

$$\text{“}\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}\text{”}$$

seja diferenciável. No nosso caso isto é $1 \circ \phi \circ \phi^{-1} = 1$, que é diferenciável. A inversa, ϕ^{-1}, também é diferenciável, pois $\phi \circ \phi^{-1} \circ 1 = 1$.
(2)Duas realizações de $\mathbb{R}$ como variedade.

$$M_1 : \mathbb{R} \ \text{ com o atlas } \ (\mathbb{R}, \phi_1) \ \text{ e } \ \phi_1 = 1$$
$$M_2 : \mathbb{R} \ \text{ com o atlas } \ (\mathbb{R}, \phi_2)\text{e } \ e\phi_2 : x \mapsto x^3$$

(a) Os atlas não são compatíveis. Vamos mostrar que as cartas ϕ_1 e ϕ_2 não são compatíveis.

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_2^{-1} &= \phi_2^{-1} \\ \phi_2 \circ \phi_1^{-1} &= \phi_2 \end{aligned}$$

$\phi_2 : x \mapsto x^3$ é diferenciável, mas ϕ_2^{-1} não é. De fato,

$$\phi_2^{-1} : \begin{cases} x \mapsto \sqrt[3]{x} & (x > 0) \\ x \mapsto -\sqrt[3]{|x|} & (x < 0) \end{cases}$$

tem como derivada $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, que é infinita na origem.
(3) Duas estruturas de variedade sobre o mesmo conjunto M são idênticas (*i.e.* possuem atlas compatíveis) se e somente se $1 : M_1 \to M_2$ for um difeomorfismo.

9 Campos tensoriais

Para cada tipo (r, s) de tensor e cada $m \in M$ existe o espaço $(M_m)^r_s$ sobre M_m. Para (r, s) fixo, a união desses espaços tensoriais, considerada apenas como conjunto, quando m varre M, é chamada de fibrado de tensores do tipo (r, s) sobre M, e denotado por $T^r_s(M)$. Então,

$$T^r_s(M) = \bigcup_{m \in M} {M_m}^r{}_s \tag{5}$$

Em particular $T(M) = T^1_0(M)$ é o fibrado tangente; T^0_1 é o fibrado cotangente.

Definição 27 *Um campo tensorial T de tipo (r, s) é uma função*

$$T : E \to T^r_s(M) \ ,$$

onde o domínio E de T é um subconjunto de M tal que, para todo $m \in E$, se tem $T(m) \in {M_m}^r{}_s$.

Para $r = 1$, $s = 0$, tem-se, de novo, os campos vetoriais. Se $r = s = 0$, tem-se um "campo escalar", ou seja, uma simples função real diferenciável.

Seja f uma função real diferenciável definida em $E \subset M$. Para cada $m \in E$, df_m é uma aplicação linear de $M_m \to \mathbb{R}$, ou seja, é um membro de M^*_m, que, neste caso, é ${M_m}^0{}_1$. Logo, a diferencial de f é um campo tensorial de tipo $(0, 1)$.

Um campo tensorial é antissimétrico se o seu valor em cada ponto m, $T(m)$, é um tensor antissimétrico.

Seja T um campo tensorial de tipo (r, s), sejam $\theta_1, \ldots, \theta_r$ campos tensoriais de tipo $(0, 1)$ e sejam $X_1, \ldots, X_s$ campos vetoriais. Então uma função real é definida por

$$T\left(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s\right)(m) = T(m)\left(\theta_1(m), \ldots, \theta_r, X_1(m), \ldots, X_s(m)\right)$$

Em particular, as componentes de T em relação às coordenadas x^i são as d^{r+s} funções reais

$$T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = T\left(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}\right)$$

Dizemos que um campo tensorial é diferenciável se suas componentes o forem.

Definição 28 *Um campo tensorial de tipo $(0, 1)$ que é diferenciável é denominado <u>1-forma</u>, ou <u>forma de Pfaff</u>.*

Proposição 2 *Um campo tensorial de tipo* (r, s) *é diferenciável se e somente se, para quaisquer 1-formas* $\theta_1, \ldots, \theta_r$ *e quaisquer campos vetoriais* $X_1, \ldots, X_s$, *a função*

$$T(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)$$

for diferenciável.

Se f é um campo escalar diferenciável, df é uma 1-forma. Contudo, nem toda 1-forma é a diferencial de um campo escalar. De fato, se x^i são as coordenadas,

$$df = \partial_i f \; dx^i$$

é a expressão coordenada de df. Então, se θ_i forem as componentes de df, temos

$$\partial_j \theta_i = \partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f) = \partial_i \theta_j$$

independentemente da escolha de coordenadas. Esta relação não é automaticamente satisfeita, pois, tomando a forma $\tau = x^1 dx^2$, temos que as componentes de τ são

$$\tau_1 = 0 \quad ; \quad \tau_2 = x^1$$

e

$$\partial_2 \tau_1 = 0 \neq \partial_1 \tau_2 = 1$$

mostrando que não pode haver uma função f tal que $df = \tau$.

10 Métrica Riemanniana

Uma <u>forma bilinear</u> sobre V é um tensor de tipo $(0, 2)$, ou seja, uma função bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$. Se $\{e_i\}$ é uma base de V e $\{\epsilon^i\}$ a base dual,

$$b = b_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j$$

Seja $v = v^i e_i \in V$. Então

$$b(v, \;\;) = b_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j (v, \;\;) = b_{ij} \langle v, \epsilon^i \rangle \epsilon^j = b_{ij} v^i \epsilon^j \equiv b_1(v)$$

ou seja, a forma bilinear b dá origem a uma função linear $b_1 : V \to V^*$ definida por

$$b_1(v) = (b_{ij} v^i) \epsilon^j$$

Um elemento de V^* tem, na base $\{\epsilon^j\}$, a expressão $v_j \epsilon^j$. Então podemos escrever $b_1(v)$ assim:

$$b_1(v) = v_j \epsilon^j$$

onde

$$v_j = b_{ij} v^i$$

operação que, no cálculo tensorial clássico, era chamada de "abaixamento de índice".

Definição 29 *Diz-se que b é* <u>*não-degenerada*</u> *se b_1 tiver um inverso.*

Proposição 3 *Uma forma bilinear é não-degenerada se e somente se*
(a) Para qualquer $v \in V$, $v \neq 0$, existe $w \in V$ tal que $b(v, w) \neq 0$, ou
(b)A matriz de componentes b_{ij} é não-singular, ou
(c)b_2 tem um inverso.

Dem: a matriz de $b_1 : V \to V^*$ em relação às bases $\{e_i\}$ e $\{\epsilon^i\}$ é (b_{ij}); a matriz de b_2 é a transposta. Logo, (b) e (c) são equivalentes.
Se b é não-degenerada, então para qualquer $v \in V$, $v \neq 0$, $b_1 v \neq 0$. Logo, existe $w \in V$ tal que $\langle w, b_1(v) \rangle \neq 0$, ou seja, $b(v, w) \neq 0$. Logo, (a) é verdadeiro.
Finalmente, se (a) é verdadeiro, então, para cada $v \in V$, $v \neq 0$, existe $w \in V$ tal que $\langle w, b_1 v \rangle = b(v, w) \neq 0$. Logo, $b_1 v \neq 0$. Logo, b_1 leva vetores não-nulos em vetores não-nulos. Então b_1 é um isomorfismo, já que $dimV = dimV^*$ (uma aplicação injetora entre espaçs de mesma dimensão é um isomorfismo). Conseqüentemente, b_1 tem um inverso.

$T : V \to W$ é injetora significa que, se $v_1 \neq v_2$, $T(v_1) \neq T(v_2)$. Considere $w = v_1 - v_2$. Temos, então: se $w \neq 0$, $T(w) = T(v_1) - T(v_2) \neq 0$. Ou seja,

$$T \text{ é injetora} \Rightarrow T \text{ leva vetores não nulos em vetores não-nulos}$$

Considere uma forma bilinear simétrica b, e seja $v \in V$. Defino como *forma quadrática associada a b* a função real

$$g(v) = b(v, v)$$

De uma maneira gerla uma forma quadrática sobre V é uma função $f : V \to \mathbb{R}$ que é quadrática nas componentes do vetor sobre o qual ela atua. Exemplo:$q(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}) = a^2 + b^2 + c^2$.

Dizemos de uma forma quadrática que ela é:
(a) Negativa definida, se $q(v) < 0 \ \forall v \neq 0$.
(b) Positiva de finida se $-q$ for negativa definida.
(c) Definida, se ela for positiva definida ou negativa definida.

Definição 30 *Uma forma bilinear simétrica e não-degenerada é denominada produto interno.*

Definição 31 *Um campo tensorial simétrico de tipo* $(0, 2)$ *que é não-degenerado é denominado métrica semi-riemanniana. Se é positivo definido em cada ponto, é uma métrica riemanniana.*

10.1 Curvas integrais

Definição 32 *Se* X *é um campo vetorial diferenciável em* $E \subset M$*, uma curva* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ *é uma curva integral de* X *se o contradomínio de* γ *estiver contido em* E *e, para cada* s *no domínio de* γ*, o vetor tangente satisfaz*

$$\gamma_*(s) = X(\gamma(s))$$

ou seja, $\gamma_* = X \circ \gamma$*.*

Diz-se que γ começa em m se $\gamma(0) = m$.

Note que o conceito de curva integral difere fundamentalmente do conceito de linha de campo (ou linha de força) muito usado em física. De fato, a linha de campo é uma curva que, em cada ponto, é paralela ao campo naquele ponto, enquanto que da curva integral se exige não só que seja paralela ao campo em cada ponto, mas também que a tangente à curva em cada ponto coincida (em módulo, direção e sentido) com o valor do campo naquele ponto. Em conseqüência, não só a imagem da curva em M é importante, mas também a parametrização. De fato, as reparametrizações permitidas para que uma curva integral permaneça como tal são muito limitadas, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 4 *Se* γ *e* τ *são curvas integrais de um campo vetorial não-nulo* X *que têm o mesmo contradomínio, então existe uma constante* c *tal que*

$$\tau(s) = \gamma(s + c)$$

para todo s *no domínio de* τ*. Inversamente, se* γ *é uma curva integral de* X*, então* $\tau(s) = \gamma(s + c)$ *também o é, para qualquer constante* c*.*

Dem: Seja $f : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ uma reparametrização, ou seja, uma função tal que $\tau = \gamma \circ f$. Então $\tau(s) = \gamma(f(s))$ para $a < s < b$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\tau_*(s) = \gamma_*(f(s)).f_*(s) = f'(s)\gamma_*(f(s))$$

Mas

$$\tau_*(s) = X(\tau(s)) \text{ e } \gamma_*(t) = X(\gamma(t)) \text{ , para } a < s < b \text{ e } \alpha < t < \beta$$

$$\tau_*(s) = f'(s)\gamma_*(f(s)) = f'(s)X(\gamma(f(s))) = f'(s)X(\tau(s)) = X(\tau(s))$$

logo,

$$f'(s) = 1 \text{ e } f(s) = s + c$$

Inversamente, se $f(s) = s + c$, $f'(s) = 1$ e $\tau_*(s) = \gamma_*(f(s))$

Corolário 6 *A parametrização de uma curva integral fica inteiramente determinada especificando-se seu valor em um ponto.*

10.1.1 Determinação de curvas integrais

Seja (U, x^i) uma carta em E. Para o campo X temos a expressão $X = X^i\partial_i$, onde X^i são funções reais definidas em $E \cap U$. Considere agora o operador γ_*. Como campo vetorial, pode também ser escrito

$$\gamma_*(s) = A^i(\gamma(s))\partial_i$$

ou

$$\gamma_* = A^i \circ \gamma\partial_i$$

Por outro lado,

$$\gamma_*(x^l) = A^i \circ \gamma\partial_i x^l = A^i \circ \gamma\delta_i^l = A^l \circ \gamma$$

de maneira que

$$\gamma_* = \gamma_*(X^l)\partial_l$$

e, como

$$\gamma_*(x^l) = \frac{d(x^l \circ \gamma)}{du}$$

ou,

$$\gamma_* = \frac{d}{du}(x^i \circ \gamma)\partial_i$$

Por outro lado,

$$X \circ \gamma = X^i \circ \gamma\partial_i$$

e, comparando, temos

$$\frac{d}{du}(x^i \circ \gamma) = X^i \circ \gamma \tag{6}$$

A curva γ será uma curva integral de X se satisfizer as equações de primeira ordem escritas acima.

Escrevendo $g^i = x^i \circ \gamma \Rightarrow g^i(u) = x^i(\gamma(u))$ e

$$X^i = F^i(x^1, \ldots, x^d) \text{ ou } X^i \circ \gamma = F^i(x^1(u), \ldots, x^d(u)) \ ,$$

temos

$$\frac{dg^i}{du} = F^i(g^1, \ldots, g^d)$$

Exemplos: Seja $M = \mathbb{R}^2$ com coordenadas x e y, e campos vetoriais correspondentes, ∂_x e ∂_y. Sejam $X = x\partial_x + y\partial_y$ e $Y = -y\partial_x + x\partial_y$ campos vetoriais. As equações para as curvas integrais de X são:

$$\frac{dx}{du} = x \qquad \frac{dy}{du} = y$$

Estas equações têm, como soluções gerais,

$$\begin{aligned} x &= Ae^u \\ y &= Be^u \end{aligned}$$

onde a e B são constantes arbitrárias. Para que $\gamma(0) = (a, b)$, devemos ter $A = a$ e $B = b$. Logo, a curva integral é

$$\gamma = (ae^u, be^u) \ .$$

Essas curvas são definidas para todo u: diz-se então que o campo vetorial é completo.

As equações para as curvas integrais de Y são

$$\frac{dx}{du} = -y \tag{7}$$

$$\frac{dy}{du} = x \tag{8}$$

cujas soluções gerais são

$$\begin{aligned} x &= A\cos u + B\sin u \\ y &= C\cos u + D\sin u \end{aligned}$$

Usando agora as equações (7) e (8), temos relações entre A, B, C, D, que são:

$$A = D \quad B = -C$$

A curva que começa em (a, b) ($\gamma(0) = (a, b)$), é

$$\begin{aligned} x &= a\cos u - b\sin u \\ y &= b\cos u + a\sin u \end{aligned}$$

Para $a = b = 0$ é a curva constante $\gamma = (0, 0)$. Nos outros casos é um círculo anti-horário. Y é completo.

10.2 Fluxos ("flows")

Tomemos como exemplo concreto de um campo vetorial o campo da velocidades de um fluido. Neste caso, a trajetória traçada por uma partícula, tendo como parâmetro o tempo, é uma curva integral. Há, contudo, outro ponto de vista útil. Pode-se perguntar onde foi parar, transcorrido um determinado intervalo de tempo, o fluido que ocupava uma certa região. Este ponto de vista conduz a uma noção puramente matemática associada a um campo vetorial–o seu fluxo (o têrmo usado em inglês é flow).

Seja γ_m a curva integral do campo vetorial X, definido em $E \subset M$, que começa em $m \in E$. O fluxo deste campo vetorial X é a coleção de aplicações

$$\{\mu_s : E \to M : s \in \mathbb{R}\}$$

definidas por

$$\mu_s(m) = \gamma_m(s)$$

para cada $m \in E$. Assim, m e $\mu_s(m)$ estão sempre sobre a mesma curva integral de X, e a diferença de valor do parâmetro entre m e $\mu_s(m)$ é s. Em outras palavras, μ_s é o mapeamento que leva cada ponto ao longo da curva integral a uma nova posição, com um incremento de s no valor do parâmetro.É evidente que $\mu_0 : E \to M$ é a identidade, pois $\mu_0(m) = \gamma_m(0) = m$. O fluxo de uma campo vetorial X fornece tanta informação quanto a totalidade das curvas integrais de X.

Um grupo a um parâmetro é uma coleção de objetos $\{\mu_s : s \in \mathbb{R}\}$ munida de uma operação" $\circ$" tal que $\mu_s \circ \mu_t = \mu_{s+t}$ e tal que existe $c > 0$ para o qual os μ_s com $-c < s < c$ são todos distintos.

Exemplos:
(1) Os números reais $\mu_s = s$, sendo $\circ = +$.

$$\mu_s \circ \mu_t = s + t = \mu_{s+t}$$

A condição é satisfeita para qualquer c.
(2) O círculo dos números complexos, $\mu_s = e^{is}$, sendo $\circ = \times$.

$$\mu_s \circ \mu_t = e^{is} \times e^{it} = e^{i(s+t)} = \mu_{s+t} \ .$$

Aqui, $c = \pi$

Proposição 5 *O fluxo $\{\mu_s\}$ de um campo vetorial diferenciável completo X que não é identicamente zero é um grupo a um parâmetro sob a operação de composição.*

Dem.: Ver [3], pg.125.

Proposição 6 *Seja $\{\mu_s\}$ o fluxo de um campo vetorial C^∞ X. A função F, definida em uma subvariedade aberta de $M \times \mathbb{R}$ por*

$$F(m, s) = \mu_s(m)$$

é C^∞. Em outras palavras, $\mu_s(m)$ é uma função C^∞ tanto de m quanto de s.

Dem.: Ver [3], pg.127.

Problema: (a) Se $\{\mu_s\}$ é o fluxo de ∂_1 e $\{\theta_t\}$ é o fluxo de ∂_2, mostre que

$$\mu_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \mu_s$$

para todo s e t.
(b) Sejam X e Y campos vetoriais com fluxos $\{\mu_s\}$ e $\{\theta_t\}$ respectivamente, e tais que

$$\mu_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \mu_s$$

pata todo s e t. Se $X(m)$ e $Y(m)$ são linearmente independentes, mostre que há coordenadas em m tais que $X = \partial_1$ e $Y = \partial_2$ no domínio da carta.

11 Derivadas de Lie

Seja X um campo vetorial C^∞ definido em $E \subset M$, seja $\{\mu_s\}$ o fluxo de X e seja $m \in E$. Da definição de μ_s, segue que ela tem um inverso, dado por μ_{-s}. Em conseqencia, para cada s para o qual $\mu_s(m)$ é definida, μ_{s*} é um isomorfismo de $M_m \to M_{\gamma_m(s)}$, onde $\gamma_m(s) = \mu_s(m)$.

Seja $\{e_i\}$ uma base de M_m. $\{\mu_{s*}e_i\}$ é então uma base de $M_{\gamma_m(s)}$. Os vetores $E_i(s) = \mu_{s*}e_i$ formam uma base para todos os espaços tangentes em pontos da curva integral, bastando tomar o valor apropriado de s. Dizemos que os E_i formam uma base móvel (*moving frame*) ao longo de γ.

Seja V um campo vetorial definido em uma vizinhança de m. As componentes de $V(\gamma(s)$ em relação \`base $\{E_i(s)\}$ serão denotadas por V^α, e são funções de s. Considere as funções

$$U^\alpha = \frac{dV^\alpha}{ds}$$

e o campo vetorial cujas componentes, nas mesmas bases, sejam $U^\alpha(s)$. Este campo vetorial é a derivada de Lie, em relação ao campo vetorial X, do campo vetorial V, e é denotado por $U = L_X V$. Para campos escalares, definimos: $L_X f = X(f)$.

A definição de derivada de Lie em relação a X pode ser estendida a qualquer tensor, desta forma:

Seja T um campo tensorial definido em uma vizinhança de m. A partir dos E_i posso formar, tomando o produto tensorial apropriado, bases para o espaço tensorial ao qual pertence T, em cada ponto de γ. As componentes de $T(\gamma(s))$ em relação às bases construídas com os $E_i(s)$ serão denotadas por T^α, onde α agora não é um índice, mas uma coleção de índices. Estas componentes são funções de s. Considere as funções

$$U^\alpha = \frac{dV^\alpha}{ds}$$

e o campo tensorial cujas componentes, nas mesmas bases, sejam $U^\alpha(s)$. Este campo tensorial é a derivada de Lie, em relação ao campo vetorial X, do campo tensorial T, e é denotada por $L_X T$.

Problema: Mostre que a definição dada não depende da particular escolha de base $\{e_i\}$ de M_m. A solução completa está em [3], pg.129.

Proposição 7 *(a) Se T é um campo tensorial, $L_X T$ é um campo tensorial de mesmo tipo que T.*
(b) $L_X T$ tem as mesmas propriedades de simetria que T.
(c)L_X é aditiva: $L_X(S+T) = L_X S + L_X T$
(d)$L_X(S \otimes T) = (L_X S) \otimes T + S \otimes L_X T$
(e) Seja $X = \partial_1$ Então, $(L_{\partial_1} T)^\alpha = \partial_1 T^\alpha$, onde α é uma coleção de índices.

(a), (b), (c) e (d) são triviais. Vamos demonstrar (e).
Seja $\{\mu_s\}$ o fluxo de ∂_1. Como as curvas integrais de ∂_1 satisfazem as equação

$$\frac{dx^1}{ds} = 1 \tag{9}$$
$$\frac{dx^i}{ds} = 0 \text{ para } i > 1 \ , \tag{10}$$

temos

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1 + s \\ x^2 &= c^2 \\ \ldots\ldots &\quad \ldots\ldots \\ x^d &= c^d \end{aligned}$$

para a curva integral que começa em $m = (c^1, \ldots, c^d)$. Então μ_s é uma translação de x^1 pelo valor s, com as demais coordenadas mantidas fixas.

Sejam $\partial_i(m)$ os vetores da base escolhida em M_m. Vamos construir a base móvel, dada por $\mu_{s*}(m)\partial_i = \mu_{s*}\partial_i(m)$. Dada uma função real qualquer f, temos

$$\begin{aligned}
\mu_{s*}(\partial_i(m))f &= \partial_i(f \circ \mu_s(m)) \\
&= \partial_i(f \circ \gamma_m(s)) = (\partial_i f)_{\gamma_m(s)}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu_{s*}\partial_i = \partial_i$$

Portanto, a base móvel é, neste caso, a própria base natural formada pelo campo ∂_i, e as componentes do tensor T são as componentes usuais, em relação à base das coordenadas. A definição diz que

$$(L_{\partial_1}T)^\alpha = \frac{dT^\alpha}{ds}$$

Mas, das equações (9),

$$\frac{dT^\alpha}{ds} = \frac{\partial T^\alpha}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds} = \frac{\partial T^\alpha}{\partial x^1}$$

ou

$$(L_{\partial_1}T)^\alpha = \partial_1 T^\alpha$$

Para esclarecer melhor a definição de derivada de Lie, vamos escrever em detalhe o processo de sua construção no caso particular de um campo vetorial V. No ponto m, associado ao valor s do parâmetro, temos

$$\begin{aligned}
V(0) &= V^i(0)e_i \\
\mu_{s*}V(0) &= V^i(0)\mu_{s*}e_i = V^i(0)E_i(s)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$V(s) = V(\mu_s(m)) = V^i(s)E_i(s)$$

Os vetores $\mu_{s*}V(0)$ e $V(\mu_s(m))$ podem ser subtraídos, pois pertencem ao mesmo espaço vetorial, $M_{\mu_s(m)}$. Seja então

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{V(\mu_s(m)) - \mu_{s*}(m)V(0)}{s} &= \lim_{s\to 0}\frac{V^i(s) - V^i(0)}{s}E_i(0) \\
&= \frac{dV^i}{ds}E_i(0)
\end{aligned}$$

Logo,

$$L_X V = \lim_{s\to 0}\frac{V(\mu_s(m)) - \mu_{s*}(m)V(0)}{s}$$

onde $V(0) = V(s = 0) = V(m)$.
Esta construção pode ser usada para qualquer campo tensorial.

Problema: Seja $\{\mu_s\}$ o fluxo do campo vetorial X. Mostre que $\mu_{s*}X(m) = X(\mu_s(m))$, e que, em conseqencia, $L_X X = 0$.
Solução: Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável. Como sabemos, existe $f_* : M_m \to N_{f(m)}$. Seja X definido numa vizinhança aberta de $m \in M$. Como se calcula $f_*(X(m))$? Uma maneira é a seguinte:
(a) Acho uma curva γ passando por m e tal que $\gamma_*(c) = X(m)$.
(2)$f_*(X(m))$ é o vetor tangente à curva $f \circ \gamma$ no ponto $f(m)$. No nosso caso, temos:
(1)A curva γ tal que sua tangente em m é $X(m)$ é a própria curva integral de X, $\gamma_m(s) = \mu_s(m)$.
(2) A imagem da curva integral por $\mu_s(m)$ é a própria curva integral, com o parâmetro acrescido de s. Mas o vetor tangente à curva integral em s é $X(\mu_s(m))$. Logo,

$$\mu_{s*}(m)X = \mu_{s*}X(m) = X(\mu_s(m))$$

Em conseqencia,

$$L_X X = \lim_{s\to 0}\left(X(\mu_s(m)) - \mu_{s*}X(m)\right) = 0$$

Teorema 8 *Seja X um campo vetorial, T um campo tensorial, x^i coordenadas e ∂_i os campos vetoriais coordenados aelas associados. $X^i = X(x^i)$ são as componentes de X, e $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ as de T. Então as componentes de $L_X T$ são:*

$$\begin{aligned}(L_X T)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} &= X T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{r} T^{i_1\ldots i_{\alpha-1} h i_{\alpha+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\partial_h X^{i_\alpha} \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{s} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\alpha-1} h j_{\alpha+1}\ldots j_s}\partial_{j_\alpha} X^h \end{aligned} \tag{11}$$

Exemplo:

$$(L_X T)^i_j = X T^i_j - T^h_j \partial_h X^i + T^i_h \partial_j X^h$$

Demonstração: consiste num truque. primeiro, constrúo um sistema de coordenadas y^i em m tal que $X = \frac{\partial}{\partial y^i}$ (é sempre possível: vide ([3]), teorema 3.5.1). Neste sistema a solução é conhecida. Dela obtenho a solução num sistema arbitrário usando as fórmulas de transformação.

No sistema de coordenadas y^i, as componentes de $U = L_X T$ são

$${}^{(y)}U^i_j = X\ {}^{(y)}T^i_j = \frac{\partial\ {}^{(y)}T^i_j}{\partial y^1}$$

As componentes de X nas coordenadas x^i são

$$X^i = X(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial y^1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
{}^{(x)}U^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\,{}^{(y)}U^h_k &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\left(X\,{}^{(y)}T^h_k\right)\\
&= \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}X\left({}^{(x)}T^p_q\frac{\partial y^k}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right)
\end{aligned}$$

Como X é um operador diferencial, temos

$$\begin{aligned}
X\left({}^{(x)}T^p_q\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right)\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^h} &= X\left({}^{(x)}T^p_q\right)\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^h}\\
&+ {}^{(x)}T^p_q X\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right)\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^h}\\
&= A+B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= X\left({}^{(x)}T^p_q\right)\delta^q_j\delta^i_p = X\left({}^{(x)}T^i_j\right)\\
B &= {}^{(x)}T^p_q X\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\right)\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^h} + {}^{(x)}T^p_q X\left(\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right)\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^h}\\
&= {}^{(x)}T^p_q X\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\right)\delta^q_j\frac{\partial x^i}{\partial y^h} + {}^{(x)}T^p_q X\left(\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right)\delta^i_p\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\\
&= {}^{(x)}T^p_j\frac{\partial x^i}{\partial y^h}X\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^p}\right) + {}^{(x)}T^i_q X\left(\frac{\partial x^q}{\partial y^k}\right)\frac{\partial y^k}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^k} &= X\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right) - \frac{\partial y^k}{\partial x^k}X\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right)\\
&= X\left(\delta^i_p\right) - \frac{\partial y^k}{\partial x^p}\frac{\partial}{\partial y^1}\frac{\partial x^i}{\partial y^h}\\
&= 0 - \frac{\partial y^k}{\partial x^p}\frac{\partial}{\partial y^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\\
&= -\frac{\partial X^i}{\partial x^p}
\end{aligned}$$

Então

$$B = {}^{(x)}T^p_j\left(-\frac{\partial X^i}{\partial x^p}\right) + {}^{(x)}T^i_q\frac{\partial X^q}{\partial x^j}\ .$$

Finalmente, então,

$${}^{(x)}U^i_j = X\left({}^{(x)}T^i_j\right) - {}^{(x)}T^p_j\frac{\partial X^i}{\partial x^p} + {}^{(x)}T^i_q\frac{\partial X^q}{\partial x^j}$$

Corolário 7

$$L_{X+Y} = L_X + L_Y$$

Problema: para um campo escalar f, mostre que

$$L_X df = d(Xf)$$

Solução:

$$\begin{aligned}
(L_X df)_i &= X(df_i) + (df)_h \partial_i X^k \\
df &= \partial_i f \ dx^i \\
(L_X \ df)_i &= X(\partial_i f) + (\partial_h f)\partial_i X^h \\
&= X^j \partial_j (\partial_i f) + (\partial_h f)\partial_i X^h \\
&= X^j \partial_j \partial_i f + (\partial_j f)\partial_i X^j \\
&= \partial_i \left(X^j \partial_j f \right) \\
&= \partial_i (Xf)
\end{aligned}$$

Logo, $L_X \ df = d(Xf)$.

Problema: Sejam X, Y campos vetoriais, e θ uma 1-forma. Mostre que

$$X\langle Y, \theta\rangle = \langle L_X Y, \theta\rangle + \langle Y, L_X \theta\rangle$$

Solução: Se V é um campo vetorial e τ uma 1-forma, temos

$$\langle V, \theta\rangle = \langle V^i \partial_i, \theta_j \ dx^j\rangle = V^i \theta_j \delta_i^j = V^i \theta_i$$

Logo,

$$X\langle Y, \theta\rangle = X\left(Y^i \theta_i\right) = \left(XY^i\right)\theta_i + Y^i X(\theta_i) = \left(X^j \partial_j Y^i\right)\theta_i + Y^i X^j \partial_j \theta_i$$

$$\langle L_X Y, \theta\rangle = (L_X Y)^i \theta_i = \left(XY^i - Y^h \partial_h X^i\right)\theta_i = X^j (\partial_j Y^i)\theta_i - Y^j (\partial_j X^i)\theta_i$$

$$\langle Y, L_X \theta\rangle = Y^i (L_X \theta)_i = Y^i \left(X\theta_i + \theta_j \partial_i X^j\right) = Y^i \left(X^j \partial_j \theta_i + \theta_j \partial_i X^j\right) = Y^i X^j \partial_j \theta_i + Y^i \theta_j \partial_i X^j$$

Somando-se as duas últimas obtém-se o resultado.

Problema: Para campos vetoriais X e Y e campo escalar f,

$$(L_X Y) f = XYf - YXf$$

Solução: basta, no problema anterior, colocar $\theta = df$.

$$\langle L_X Y, df\rangle + \langle Y, L_X(df)\rangle = X\langle Y, df\rangle$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\langle Y, df\rangle &= df(Y) = Y(f) \\
\langle L_X Y, df\rangle &= df(L_X Y) = L_X Y(f) \\
L_X df &= d(Xf) \\
\langle Y, L_X(df)\rangle &= \langle Y, d(XF)\rangle = d(Xf)(Y) \\
&= Y(X(f)) = YX(f) \\
L_X Y(f) + YX(f) &= XY(f)
\end{aligned}$$

Em conseqencia,

$$L_x Y = XY - YX$$

e

$$L_Y X = -L_X Y$$

11.0.1 Derivada de Lie no formalismo clássico

Na formulação clássica, um campo vetorial é caracterizado pela sua lei de transformação

$$A'^{\,i}(x') = \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^l} A^l(x)$$

Suponhamos que as coordenadas x' e x sejam ligadas por uma transformação infinitesimal

$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i(x)$$

onde $\xi^i(x)$ são as componentes de um campo vetorial "pequeno". Temos

$$\frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^l} = \delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}$$

e, então,

$$A'^{];i}(x') = A^i(x) + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} A^l(x) \tag{12}$$

Por outro lado, usando Taylor e conservando só até a primeira ordem em ξ^i, temos

$$A'^{\,i}(x') = A'^{\,i}(x) + (x' - x)^l \partial_l A^i(x) \tag{13}$$

$$A'^{\,i}(x') = A'^{\,i}(x) + \xi^l \partial_l A^i(x) \tag{14}$$

Combinando (12) e (14), temos

$$A'^{\,i}(x) + \xi^l \partial_l A^i(x) = A^i(x) + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} A^l(x) \tag{15}$$

ou, definindo a variação de forma

$$\delta A^i(x) = A'^{\,i}(x) - A^i(x) \ , \tag{16}$$

Lembrando que

$$\xi^l \partial_l = \xi$$

temos

$$\delta A^i(x) = -\left(\xi A^i(x) - A^l \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right)$$

ou

$$\delta A^i(x) = -\left(L_\xi A\right)^i$$

ou, finalmente,

$$\delta A = -L_\xi A \tag{17}$$

12 Formas diferenciais

Uma p-forma (ou forma diferencial de grau p) é um campo tensorial C^∞ antissimétrico de tipo $(0, p)$. Uma 0-forma é uma função real c^∞. Sobre um campo vetorial V de dimensão d não há p-formas com $p > d$.

Se as coordenadas são x^i, os dx^i são uma base local para 1-formas: toda 1-forma pode ser localmente expressa como $f_i dx^i$, onde os f_i são funções reais C^∞. Por meio do produto exterior criam-se, a partir dos dx^i, bases para todos os tipos de p-formas. Por exemplo, $\{dx^i \wedge dx^j : i < j\}$ é uma base local para 2-formas; $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d$ é uma base local para d-formas.

A seguinte convenção será usada no estudo das p-formas:

$$a_{(1_1 i_2)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3 \ ,$$

ou seja, quando a lista de índices estiver entre parênteses, a soma deve ser feita sobre todas as seqencias crescentes de valores dos índices. Por componentes de uma p-forma entendemos suas componentes em relação à base de índices crescentes, e não em relação à base tensorial $\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p}\}$.

Problema: (a) Mostre que a regra para calcular a ação das formas de base sobre campos vetoriais de base é:

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \left(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_p}\right) = \frac{1}{p!} \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_p}_{j_p}$$

onde $i_1, \ldots, i_p$ e $j_1, \ldots, j_p$ são, ambas, seqencias crescentes de índices.
(b)Se $\theta_{i_1 \ldots i_p}$ são as componentes de uma p-forma θ, mostre que

$$\theta(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_p}) = \frac{1}{p!} \theta_{i_1 \ldots i_p}$$

12.1 Derivada exterior

References

[1] Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, IMPA, 1995.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* Wiley, 1996.

[3] R.L. Bishop, S.I. Golberg, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, 1968.

[4] Barrett O'Neill, *Elementary Differential Geometry, second edition*, Academic Press, 1997.