Part I
Circuitos de Corrente Alternada

1 Circuitos RL

1.1 Obtendo a equação

Aplicando-se uma diferença de potential a um condutor ôhmico, e supondo que a dependência temporal não seja muito forte (freqüências da ordem de 60Hz, por exemplo), procura-se a relação entre a força eletromotriz e a corrente. Vamos resolver este problema, seguindo Pauli, usando considerações energéticas. O gerador de f.e.m. é um dispositivo qualquer, freqüentemente de natureza não eletromagnética (por exemplo, química, no caso de baterias), que mantém uma diferença de potencial $\phi' - \phi$ entre os extremos de um condutor ôhmico.

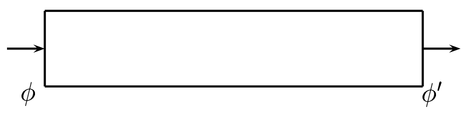

Fig.1 - Esquema do condutor

Precisaremos do importante resultado

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{1}$$

que se obtém assim:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \tag{2}$$

e

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

Usando a Eq. 2 na Eq. 3 e utilizando a linearidade do operador rot, podemos escrever

$$rot(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \tag{4}$$

Já sabemos que , para qualquer campo vetorial $\vec{V}$, a relação

$$rot\,\vec{V} = 0 \tag{5}$$

implica na existência de um escalar ϕ tal que

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi \tag{6}$$

Logo, usando a Eq. 5 e a Eq. 6 na Eq. 4, obtemos a Eq. 1.

No condutor considerado, a potência dissipada é dada por

$$J = \int d^3\vec{r}\,\vec{J}.\vec{E} = \int d^3\vec{r}\,\frac{\vec{J}.\vec{J}}{\sigma} = i^2 R \tag{7}$$

onde i é a corrente e R a resistência do condutor.

Por outro lado, usando a Eq. 1,

$$J = \int d^3\vec{r}\,\vec{j}.\vec{E} = -\int d^3\vec{r}\,\vec{j}.\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}\,\vec{j}.\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{8}$$

Ora, $div(\phi\vec{J}) = \phi\, div(\vec{j}) + \vec{j}.\vec{\nabla}\phi$, e, na ausência de capacitores, podemos supor que não haja variação de carga em nenhum ponto do circuito, ou seja, que $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, ou, equivalentemente (por causa da equação da continuidade), que $div\vec{J} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} J &= -\int d^3\vec{r}\, div(\phi\vec{j}) - \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}\,\vec{j}.\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \\ &= -\int \phi\vec{j}.\vec{n}\, dS - \frac{1}{c^2}\int d^3\vec{r}_P \int d^3\vec{r}_Q\, \frac{\vec{j}(\vec{r}_P).\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}(\vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} \\ &= -\int \phi\vec{j}.\vec{n} dS - Li\frac{di}{dt} \end{aligned} \tag{9}$$

onde S é, naturalmente, a superfície externa do condutor. A integração na superfície é simples, pois $\vec{j}.\vec{n} = 0$ nas superfícies laterais (senão "escaparia" corrente pelos lados do condutor), mas não nas "bases" do condutor. Temos

$$-\int \phi\vec{j}.\vec{n} dS = i(-\phi' + \phi) \tag{10}$$

Logo,

$$J = i(\phi' - \phi) - Li\frac{di}{dt} \tag{11}$$

Comparando com (7), obtemos

$$Ri^2 = i(\phi' - \phi) - Li\frac{di}{dt} \tag{12}$$

Ora, $\phi' - \phi$ é a diferença de potencial $V^{(e)}$ criada pela fonte de força eletromotriz (gerador). Tem-se, então,

$$V^{(e)} = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{13}$$

que é a equação básica na ausência de capacitores.

1.2 Resolvendo a equação

Primeiramente acha-se a solução geral da versão homogênea da Eq. 13, isto é, com o primeiro membro igual a zero:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

e, por integração,

$$log\frac{i}{K} = -\frac{R}{L}t$$

ou, após exponenciação,

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \tag{14}$$

onde K é uma constante arbitrária. A solução 14 é a geral, pois é solução de uma equação diferencial de primeira ordem contendo uma constante arbitrária.

1.2.1 F.E.M. constante

Para achar uma solução particular da Eq. 13 precisamos especificar $V^{(e)}$ em detalhe. Seja, para começar, $V^{(e)}$ constante (como uma pilha de 1,5 Volts, por exemplo). Então

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V^{(e)} \tag{15}$$

possui a solução $i = \frac{V^{(e)}}{R}$. A solução geral da Eq. 13 é, então,

$$i(t) = \frac{V^{(e)}}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}}. \tag{16}$$

Para $t = 0$, temos

$$i(0) = \frac{V^{(e)}}{R} + K$$

Logo,

$$K = i(0) - \frac{V^{(e)}}{R}$$

Segue que

$$i(t) = \frac{V^{(e)}}{R} + (i(0) - \frac{V^{(e)}}{R})e^{-\frac{R}{L}t} \tag{17}$$

Temos nesta solução um termo que decresce com o tempo, terminando por desaparecer. É o chamado "transiente": para R fixo, o transiente é tanto mais duradouro quanto maior for L, A indutância, portanto, tem um caráter de inércia, opondo-se ao desaparecimento do transiente. Esgotado o transiente, permanece a corrente estacionária, cujo valor é $\frac{V^{(e)}}{R}$.

1.2.2 F.E.M. periódica

O caso mais interessante é o de uma força eletromotriz periódica, $V_0 e^{j\omega t}$ (usamos j como $\sqrt{(-1)}$ para não confundir com a corrente, denotada por i). Para achar uma solução particular de

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_0 e^{j\omega t} \tag{18}$$

tentamos $i = Fe^{j\omega t}$, com F a determinar. Como, então,

$$\frac{di}{dt} = Fe^{j\omega t}$$

obtemos, para a Eq. 18,

$$Lj\omega Fe^{j\omega t} + RFe^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t} \quad .$$

Cancelando a exponencial obtém-se facilmente

$$F = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

ou seja,

$$i = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \tag{19}$$

Note que

$$R + j\omega L = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)} e^{jarctg(\frac{\omega L}{R})}$$

de maneira que

$$\frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}} e^{-jarctg(\frac{\omega L}{R})}$$

Levando em 19 , temos

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}} e^{j(\omega t - arctg(\frac{\omega L}{R}))} \tag{20}$$

ou, finalmente, tomando a parte real,

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}} cos(\omega t - \phi) \tag{21}$$

com

$$\phi = arctg(\frac{\omega L}{R})$$

A solução geral da Eq. 13 será, então,

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}} cos(\omega t - \phi) + Ke^{-\frac{R}{L}t} \tag{22}$$

onde se identificam claramente a corrente estacionária periódica e o termo transiente.

2 Circuitos RLC

2.1 Obtendo a equação

Estamos agora em condições de incluir um capacitor entre os componentes do nosso circuito. Idealmente, então, o circuito conterá uma resistência (R), uma indutância (L), e uma capacitância (C). Daí o nome RLC. Em relação ao caso anterior (RL), a diferença fundamental é que, por causa da presença do capacitor, a corrente não será mais estacionária. De fato, quando o capacitor estiver se carregando (ou descarregando), haverá uma variação de carga em suas placas. Logo, alí, $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ não será nula. Ora, pela equação da continuidade, $div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, logo, $div\vec{j} \neq 0$ nas placas do capacitor. (Note que, porém, $div\vec{j} = 0$ nas outras partes do circuito, pois não há acúmulo de cargas a não ser nas placas do capacitor).

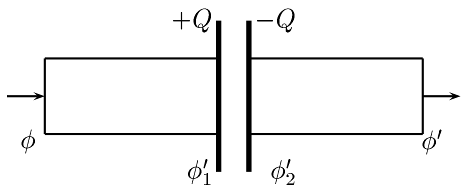

Fig.2 - Esboço de um circuito RLC

Como no caso anterior, vamos calcular a potência dissipada pelo circuito de duas maneiras diferentes. A primeira, idêntica ao caso anterior, dá:

$$J = \int d^3\vec{r}\vec{j}.\vec{E} = R\,i^2 \tag{23}$$

enquanto que, na segunda, escrevemos $\vec{E}$ em termos dos potenciais, obtendo

$$J = \int d^3\vec{r}\vec{j}.\vec{E} = \int d^3\vec{r}\vec{j}.(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) \tag{24}$$

A integração é estendida ao volume do condutor. Como $\vec{j} = 0$ entre as placas do capacitor, podemos dividir o volume em dois:V_1, que é o volume do primeiro trecho do condutor, começando na base de potencial ϕ' e terminando na primeira placa do capacitor, e V_2, que começa na segunda placa e vai até a base com potencial ϕ.Esses volumes são, portanto, disjuntos. Sejam S_1 e S_2 as superfícies que os delimitam. Considere a integral

$$I_1 = -\int d^3\vec{r}\vec{j}.\vec{\nabla}\phi \tag{25}$$

que pode ser escrita como

$$I_1 = -\int_{V_1} d^3\vec{r}\vec{j}.\vec{\nabla}\phi - \int_{V_2} d^3\vec{r}\vec{j}.\vec{\nabla}\phi = F_1 + F_2 \tag{26}$$

$$F_1 = -\int_{V_1} d^3\vec{r}\vec{j}.\vec{\nabla}\phi = -\int_{V_1} d^3\vec{r}div(\phi\vec{j}) + \int_{V_1} d^3\vec{r}\phi div\vec{j} \tag{27}$$

Mas no interior do volume, $div\vec{j} = 0$. A última integral se reduz então à sua contribuição na placa, que é $\int_{Placa} d^3\vec{r}\phi(-\frac{\partial\rho}{\partial t})$ Usando o teorema do divergente na primeira, temos:

$$F_1 = -\int_{S_1} \phi\vec{j}.\vec{n}dS - \int_{Placa} d^3\vec{r}\phi\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\int_{S_1} \phi\vec{j}.\vec{n}dS - \phi_1'\frac{dQ}{dt} \tag{28}$$

Como já vimos no caso em que não havia capacitores, F_1 dá:

$$F_1 = \phi'\, i - \phi_1'\frac{dQ}{dt} \tag{29}$$

É uma brincadeira de criança mostrar que, analogamente,

$$F_2 = -\phi i + \phi_2'\frac{dQ}{dt} \tag{30}$$

Para completar o cálculo de J na Eq. 24 resta calcular:

$$-\frac{1}{c}\int d^3\vec{r}\vec{j}.\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -Li\frac{di}{dt} \tag{31}$$

já que se trata de uma repetição exata do caso RL. Temos, portanto,

$$J = (\phi' - \phi)i + (\phi_2' - \phi_1')\frac{dQ}{dt} - Li\frac{di}{dt} \tag{32}$$

Comparando (32) com (23), obtemos

$$(\phi' - \phi)i + (\phi_2' - \phi_1')\frac{dQ}{dt} - Li\frac{di}{dt} = Ri^2 \tag{33}$$

de onde sai

$$V^{(e)}i = V\frac{dQ}{dt} + Li\frac{di}{dt} + Ri^2 \tag{34}$$

onde pusemos $V = \phi_1' - \phi_2'$. que é a diferença de potencial entre as placas do capacitor.

Resta determinar a relação entre i e $\frac{dQ}{dt}$. Para isso, toma-se uma superfície fechada S_3 (ver Fig.2). Seja V_3 o volume delimitado por essa superfície. Temos

$$\int_{V_3} d^3\vec{r}div\vec{j} = \int_{S_3} \vec{j}.\vec{n}dS \tag{35}$$

que dá, pela equação da continuidade,

$$-\int_{V_3} d^3\vec{r}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -i \tag{36}$$

ou seja,

$$\frac{dQ}{dt} = i \tag{37}$$

Levando este resultado à Eq. 34, temos, cancelando um fator i,

$$V^{(e)} = V + L\frac{di}{dt} + Ri \tag{38}$$

Lembrando que, num capacitor, $C = \frac{Q}{V}$,

$$V^{(e)} = \frac{Q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri \tag{39}$$

Derivando mais uma vez e usando 37,

$$\dot{V}^{(e)} = L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \tag{40}$$

que é nossa equação final.

2.2 Resolvendo a equação

Usando $i = \frac{dQ}{dt}$ na Eq. 39 obtém-se

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V^{(e)} \quad . \tag{41}$$

Considere a equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido por um termo proporcional à velocidade e forçado por uma força externa $F^{(e)}$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = F^{(e)} \quad . \tag{42}$$

As equações são idênticas, L fazendo o papel da massa (inércia), R o papel de α (notar que α deve ser positiva!), $\frac{1}{Q}$ desempenhando o papel da constante elástica k.

O caso mais interessante é o de uma F.E.M. periódica. Neste caso, como no oscilador harmônico, teremos o importante fenômeno da ressonância.

Resolve-se a Eq. 41 em duas etapas: primeiro, achamos a solução geral da homogênea. Depois, adicionamos a ela uma solução particular da inomogênea, obtendo a solução geral da inomogênea.

2.2.1 Solução da homogênea

Pondo $Q = e^{at}$, temos $\frac{dQ}{dt} = a\,e^{at}$ e $\frac{d^2Q}{dt^2} = a^2\,e^{at}$. Logo, a equação homogênea

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

transforma-se em

$$la^2 + Ra + \frac{1}{C} = 0$$

após o cancelamento da exponencial.

Part II
Radiação eletromagnética

3 Potenciais retardados

Os potenciais eletromagnéticos no "calibre" de Lorentz satisfazem as equações

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{43}$$

$$\vec{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\phi}}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{44}$$

Como ambas as equações têm a mesma forma, basta estudar uma delas. Por exemplo, a Eq. 44. Note-se, primeiro, que a equação de Poisson

$$\vec{\nabla}^2\phi = -4\pi\rho \tag{45}$$

é um caso particular da 44, quando o potencial ϕ é independente do tempo. A solução da equação de Poisson 45 é:

$$\phi(\vec{R}) = \int d^3\vec{r'}\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{46}$$

e poderíamos conjecturar que a solução da 44 seria simplesmente uma modificação da 46 que consiste em introduzir a dependência temporal em ρ, ou seja

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r'}\frac{\rho(\vec{r'}, t)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \qquad FALSA! \tag{47}$$

No entanto, isto não é verdadeiro. A Eq. 47 está dizendo que, mesmo que $\vec{r'}$, a posição da carga, esteja muito distante de $\vec{r}$, a posição em que estamos medindo o potencial, o valor deste no instante t depende só do valor da carga neste mesmo instante. Mas isto significa propagação instantantânea! Mais razoável é supor que uma mudança na carga em $\vec{r'}$ só produza efeitos em $\vec{r}$ depois de um certo intervalo de tempo, durante o qual a informação de que a garga mudou viaja de $\vec{r'}$ até $\vec{r}$. Ora, esta viagem dura $\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}$ segundos, logo, seria de se esperar que

$$\phi(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r'}\frac{\rho(\vec{r'},t-(|\vec{r}-\vec{r'}|/c))}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{48}$$

e, analogamente,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r'}\frac{\vec{j}(\vec{r'},t-(|\vec{r}-\vec{r'}|/c))}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{49}$$

Este resultado pode ser obtido resolvendo diretamente as Eqs. 43 e 44 pelo método das funções de Green, que é apresentado no apêndice a este capítulo. O leitor pode passar sem essa dedução, se achou razoáveis os argumentos acima. Os potenciais dados por 48 e 49 são denominados potenciais retardados [1]

[1] Uma estrela muito distante cessa de brilhar. Continuamos a vê-la por muitos e muitos anos, até que a "informação" de que ela se apagou chegue até nós, com um retardo dado pelo tempo que a luz leva para percorrer a distância entre nós e a estrela. Isto é um exemplo da ação dos potenciais retardados.